Proceedings of the International Colloquium on
Algebraic Groups and Homogeneous Spaces
January 2004, TIFR, Mumbai.

La Catégorie des Représentations du Groupe Symétrique S_t, lorsque t n'est pas un Entier Naturel

P. Deligne

Abstract

Soient k un corps de caractéristique 0 et t dans k, supposé ne pas être un entier ≥ 0. Nous construisons une catégorie tensorielle semi-simple $\mathrm{Rep}(S_t)$ qui "interpole" les catégories des représentations linéaires (sur k) des groupes symétriques $\mathbf{S}_n$, n grand. En une valeur entière ≥ 0 de t, au moins deux catégories tensorielles "spécialisation" de $\mathrm{Rep}(S_t)$ existent, l'une la catégorie des représentations de $\mathbf{S}_t$, l'autre non semi-simple.

La théorie reproduit, en plus simple, des résultats connus analogues pour les groupes linéaires ou orthogonaux, qui seront rappelés.

Let k be a field of characteristic 0. For t in k which is not an integer ≥ 0, we construct a semi-simple tensor category $\mathrm{Rep}(S_t)$ which "interpolates" the categories of linear representations (over k) of the symmetric groups $\mathbf{S}_n$, n large. When t becomes a natural integer, $\mathrm{Rep}(S_t)$ can be "specialized" to a tensor category in at least two ways: as the usual category of representations of $\mathbf{S}_t$, or as a non semi-simple tensor category.

Known parallel results for the series of linear or orthogonal groups will be recalled in sections 9 and 10.

Introduction

Si G est un schéma en groupe affine sur un corps k, la catégorie $\mathrm{Rep}(G)$ des représentations linéaires de dimension finie de G sur k est une catégorie abélienne. Elle est munie du foncteur produit tensoriel de représentations $\otimes$: $\mathrm{Rep}(G) \times \mathrm{Rep}(G) \to \mathrm{Rep}(G)$. Ce foncteur est ACU, i.e. il est muni de contraintes d'associativité et de commutativité, et il admet un objet unité 1. Il est rigide, i.e. chaque objet X admet un dual $X^\vee$; un objet muni de $\delta\colon \ \mapsto X\otimes X^\vee$ et de $\mathrm{ev}\colon X^\vee\otimes X\to 1$ tels que les morphismes composés

$$X \xrightarrow{\delta\otimes X} X\otimes X^\vee\otimes X \xrightarrow{X\otimes \mathrm{ev}} X$$

$$X^\vee \xrightarrow{X^\vee\otimes\delta} X^\vee\otimes X\otimes X^\vee \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes X^\vee} X^\vee$$

soient une identité. Enfin, $k\xrightarrow{\sim}\mathrm{End}(1)$. En d'autres termes, $\mathrm{Rep}(G)$ est, dans la terminologie de (Deligne 1990) 2.1, une catégorie tensorielle sur k.

Si k est algébriquement clos, la catégorie tensorielle $\mathrm{Rep}(G)$ détermine G à isomorphisme près (Saavedra 1972). De ce point de vue, les catégories tensorielles généralisent les schémas en groupes affines. On dispose d'autres exemples de catégories tensorielles que les $\mathrm{Rep}(G)$, mais on n'a aucune idée de comment les classifier toutes, ni même celles qui sont semi-simples de $\otimes$-génération finie (et par là analogues aux catégories $\mathrm{Rep}(G)$ pour G un groupe algébrique extension d'un groupe fini par un groupe réductif).

Une autre exemple de catégorie tensorielle est la catégorie des super représentations d'un super schéma en groupe affine G. Une variante plus naturelle est de considérer G muni de $\varepsilon\colon \mu_2\to G$ tel que l'action intérieure de μ_2 sur l'algèbre affine $\mathcal{O}(G)$ de G définisse la graduation $\bmod 2$ de $\mathcal{O}(G)$, et la catégorie $\mathrm{Rep}(G,\varepsilon)$ des super représentations V pour lesquelles l'action de μ_2 donne la graduation $\bmod 2$ de V.

En caractéristique p, S. Gelfand et D. Kazhdan (1992) ont construit de nouvelles catégories tensorielles semi-simples comme "sous-quotients" de catégories de représentations. Par contre, sur k algébriquement clos de caractéristique 0, les seules catégories tensorielles que je connaisse sont obtenues par "interpolation" de catégories $\mathrm{Rep}(G,\varepsilon)$.

Voici une méthode d'interpolation: on part d'une famille infinie de catégories tensorielles $\mathcal{C}_i$ sur k, d'un ultrafiltre non trivial F sur l'ensemble d'indices I, et on prend l'ultraproduit $\mathcal{C}$ des $\mathcal{C}_i$. Un objet de $\mathcal{C}$ est donc une famille (X_i) d'objets des $\mathcal{C}_i$, un morphisme $(X_i)\to(Y_i)$ est un germe selon F de famille de morphismes $X_i\to Y_i$ et le produit tensoriel est donné par $(X_i)\otimes(Y_i)=(X_i\otimes Y_i)$. La catégorie $\mathcal{C}$ est tensorielle sur le corps k_F ultrapuissance de k. Elle est peu sympathique en ce que, même si les $\mathcal{C}_i$ sont des catégories de représentations de groupes algébriques linéaires, des groupes Hom dans $\mathcal{C}$ seront de dimension infinie. Pour faire mieux, on peut partir de catégories tensorielles $\mathcal{C}_i$ sur k, chacune étant munie d'un objet X_i, et considérer la sous-catégorie tensorielle pleine $\mathcal{C}'$ de $\mathcal{C}$ engendrée par $X=(X_i)$. Les objets de $\mathcal{C}'$ sont donc les sous-quotients des sommes de $T^{r,s}(X):=X^{\otimes r}\otimes X^{\vee\otimes s}$. Supposons que

($*$) Quels que soient r et s, l'objet $T^{r,s}(X_i)$ de $\mathcal{C}_i$ est de longueur finie, bornée indépendamment de i.

Sous cette hypothèse, les objets de $\mathcal{C}'$ sont de longueur finie, et les groupes Hom sont donc de dimension finie sur k_F (considérer $\mathcal{H}om(X,Y)$ et appliquer 3.2.4).

La définition par ultraproduit est quelque peu théologique. Dans de bons cas, on peut associer à chaque i un paramètre λ_i dans k, qui décrit $(\mathcal{C}_i, X_i)$, et $\mathcal{C}'$ peut être construite purement en terme de $\lambda = (\lambda_i) \in k_F$. Plus précisément, pour k_1 une extension de k et $\lambda_1 \in k_1$ transcendant sur k, on peut construire une catégorie tensorielle $\mathcal{C}(\lambda_i)$ sur k_1, qui donne $\mathcal{C}'$ quand on prend $k_1 = k_F$ et $\lambda_1 = (\lambda_i)$. Le rôle des ultraproduits n'est plus que d'avoir attiré l'attention sur le condition ($*$).

Le cas "λ_1 transcendant" est le cas facile. Plus intéressant, et plus difficile, est de prendre λ_1 quelconque dans une extension k_1 de k, ou au moins de comprendre quelles valeurs de λ_1 sont "singulières", et comment.

On suppose dorénavant k de caractéristique 0. Le cas traité dans l'article est le suivant:

I:	l'ensemble des entiers ≥ 0;
$\mathcal{C}_n$:	la catégorie des représentations de $\mathbf{S}_n$;
X_n:	la représentation de permutation sur k^n;
paramètre:	n;
valeurs singulières:	les entiers ≥ 0.

Les cas suivants sont essentiellement connus et seront rappelés:

$I =$	l'ensemble des entiers ≥ 0;
$\mathcal{C}_n =$	$\mathrm{Rep}(GL(n))$ (resp $\mathrm{Rep}(\mathrm{O}(n))$;
$X_n =$	représentation évidente;
paramètre:	n;
valeurs singulières:	$\mathbb{Z}$.

Dans le cas où $\mathcal{C}_i$ est la catégorie des représentations d'un groupe fini G_i, et où X_i est la représentation de permutation définie par une action de G_i sur un ensemble fini B_i, la condition ($*$) équivaut à
($*'$) quel que soit r, le nombre d'orbites de G_i dans B_i^r est borné indépendamment de i.

Voici des exemples où la condition ($*'$) est vérifiée. Dans chacun, on fixe un corps fini $\mathbb{F}_q$ et I est l'ensemble des entiers ≥ 0.

(A) $G_n = GL(n, \mathbb{F}_q)$, $B_n = \mathbb{F}_q^n$;
(B) $G_n = \mathrm{O}(n, \mathbb{F}_q)$, $B_n = \mathbb{F}_q^n$;
(C) $G_n = \mathrm{Sp}(2n, \mathbb{F}_q)$, $B_n = \mathbb{F}_q^{2n}$.

Dans le cas (A), on peut prendre pour paramètre $\lambda_n := q^n$, et je conjecture que les valeurs singulières du paramètre sont les q^n pour n entier ≥ 0.

Je remercie le referee d'une lecture attentive, qui m'a amené à corriger plusieurs points obscurs.

1 Terminologie et Notations

1.1. On utilisera les notations suivantes.

k: corps de caractéristique 0, fixé dans toute la suite.

Pour I un ensemble fini:

S_I: groupe symétrique des permutations de I;

k^I: espace vectoriel sur k librement engendré par I;

$(e_i)_{i\in I}$: sa base évidente.

Si $I = \{1,\dots,n\}$, on écrit $\mathbf{S}_n$ (resp. k^n) plutôt que S_I (resp. k^I).

1.2. Soit $(\ ,\ )$ la forme bilinéaire symétrique sur k^I définie par $(e_i, e_j) = \delta_{ij}$. Elle identifie k^I à son dual. Regardant k^I comme l'espace des fonctions de I dans k, par $u \mapsto \Sigma u(i)e_i$, on définit sur k^I une structure d'algèbre par $(u.v)(i) = u(i)v(i)$. Pour cette structure d'algèbre, on a $(u,v) = \mathrm{Tr}(uv)$.

1.3. Le foncteur $I \mapsto k^I$ étant un adjoint à gauche, il respecte les limites inductives, et en particulier transforme sommes disjointes en sommes directes. Il transforme produits finis en produits tensoriels, par

$$\bigotimes_{j\in J} k^{I_j} \xrightarrow{\sim} k^{\prod I_j}: \ \otimes e_{a(j)} \longmapsto e_{(a(j))_{j\in J}}.$$

1.4. Si un groupe G agit sur I, il agit sur k^I par transport de structures: $ge_i = e_{gi}$. On appelle la représentation linéaire k^I de G la *représentation de permutation* définie par le G-ensemble I. La forme $(\ ,\ )$ et la structure d'algèbre de 1.2 sont G-invariantes. Le foncteur $I \mapsto k^I$ transforme encore sommes disjointes (resp. produits finis) de G-ensembles en sommes directes (resp. produits tensoriels) de représentations.

1.5. Soit $(U_j)_{j\in J}$ une famille finie d'ensembles finis. Un *recollement* des U_j est un ensemble fini A muni d'une famille d'injections $f_j\colon U_j \hookrightarrow A$ telle que A soit la réunion des $f_j(U_j)$.

Les U_j étant considérés comme fixes, une *donnée de recollement* sur les U_j est une classe d'isomorphie de recollements. Si r est une donnée de recollement, et $(f_j\colon U_j \hookrightarrow A)$ un représentant de r, A est déterminé à isomorphisme *unique* près par r. Ceci rend anodin l'abus de langage, que nous nous permettrons, de dire "recollement" pour "donnée de recollement". Par exemple, de dire "somme sur les recollements $(f_j\colon U_j \hookrightarrow A)$ des U_j de $\phi(A)$" pour "somme sur les données de recollements r sur les U_j de $\phi(A_r)$, pour $(f_j\colon U_j \hookrightarrow A_r)$ un représentant de r".

Une donnée de recollement sur les U_j s'identifie à une relation d'équivalence R sur la somme disjointe des U_j qui induise l'équivalence discrète $x = y$ sur chaque U_j: à R associer les $U_j \hookrightarrow (\amalg U_j)/R$. Pour $J = \{1, 2\}$, elle s'identifie aussi à la donnée de sous-ensembles $U'_j \subset U_j$ et d'une bijection $\varphi\colon U'_1 \to U'_2$: lui associer les $U_j \hookrightarrow U_1 \amalg_\varphi U_2$.

Pour $K \subset J$ et $(f_j\colon U_j \hookrightarrow A)$ un recollement des U_j, le *recollement induit* des U_j $(j \in K)$ est la famille des $f_j\colon U_j \hookrightarrow \bigcup_{j\in K} f_j(U_j)$.

1.6. Soit A un anneau commutatif. Une catégorie $\mathcal{A}$ est dite *A-linéaire* si les groupes Hom sont munis de structures de A-module pour lesquelles la composition est bilinéaire. Pour B une A-algèbre commutative, $\mathcal{A} \otimes_A B$ est alors la catégorie déduite de $\mathcal{A}$ par extension des scalaires de A à B: mêmes objets, et $\mathrm{Hom}(X, Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{A}}(X, Y) \otimes_A B$.

1.7. Soit $\mathcal{A}$ A-linéaire. L'*enveloppe additive* $\mathcal{A}^{\mathrm{add}}$ de $\mathcal{A}$ est la catégories additive A-linéaire des sommes formelles finies d'objets de $\mathcal{A}$:

objets: familles finies $(A_j)_{j\in J}$ d'objets de $\mathcal{A}$;

morphismes $(A_j)_{j\in J} \to (B_k)_{k\in K}$: matrice (f^j_k) de morphismes $A_j \to B_k$;

composition: produit matriciel.

1.8. Une catégorie *pseudo-abélienne* (SGA4 I 8.7.8 dit "additive et karoubienne") est une catégorie additive dans laquelle tout endomorphisme idempotent est la projection sur un facteur direct. L'*enveloppe pseudo-abélienne* $\mathcal{A}^{\mathrm{ps\,ab}}$ d'une catégorie A-linéaire $\mathcal{A}$ est la catégorie A-linéaire pseudo-abélienne des facteurs directs formels (images d'endomorphismes idempotents) de sommes formelles finies d'objets de $\mathcal{A}$. Voir SGA4 loc. cit.

1.9. Notons $\mathcal{H}om_A(\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2)$ la catégorie des foncteurs A-linéaires de $\mathcal{A}_1$ dans $\mathcal{A}_2$. Les constructions 1.7 et 1.8 ont une propriété universelle: si $\mathcal{B}$ est A-linéaire et additive (resp. pseudo-abélienne), le foncteur de restriction $\mathcal{H}om_A(\mathcal{A}^{\mathrm{add}}, \mathcal{B}) \to \mathcal{H}om_A(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ (resp. $\mathcal{H}om_A(\mathcal{A}^{\mathrm{ps\,ab}}, \mathcal{B}) \to \mathcal{H}om_A(\mathcal{A}, \mathcal{B})$) est une équivalence. Il "revient au même" de se donner un foncteur A-linéaire de $\mathcal{A}$ dans $\mathcal{B}$ ou de $\mathcal{A}^{\mathrm{add}}$ (resp. $\mathcal{A}^{\mathrm{ps\,ab}}$) dans $\mathcal{B}$.

Un foncteur A-bilinéaire $\mathcal{A}\times\mathcal{A}\to\mathcal{A}^{\mathrm{add}}$ se prolonge donc en un foncteur A-bilinéaire $\mathcal{A}^{\mathrm{add}}\times\mathcal{A}^{\mathrm{add}}\to\mathcal{A}^{\mathrm{add}}$, et ce prolongement est unique à isomorphisme unique près. De même avec "add" remplacé par "ps ab".

Si la catégorie A-linéaire $\mathcal{A}$ est munie d'un produit tensoriel A-bilinéaire *ACU* (*associatif*, *commutatif*, à *unité*), $\mathcal{A}^{\mathrm{add}}$ et $\mathcal{A}^{\mathrm{ps\,ab}}$ en héritent. Si le produit tensoriel de $\mathcal{A}$ est rigide, celui de $\mathcal{A}^{\mathrm{add}}$ (resp. $\mathcal{A}^{\mathrm{ps\,ab}}$) l'est aussi.

1.10. Une *partition* λ est une suite décroissante d'entiers $(\lambda_a)_{a\geq 1}$, nuls pour a assez grand. On pose $|\lambda|=\Sigma\lambda_a$ et on dit que λ est une partition de ℓ si $|\lambda|=\ell$. On regarde une suite $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_r$ comme une partition en la prolongeant par des zéros. La partition λ^* *transposée* d'une partition λ est caractérisée par l'équivalence entre $\lambda_i\geq j$ et $\lambda^*_j\geq i$. Si λ est une partition de ℓ, on notera encore λ les objets suivants attachés à λ.

(A) La classe d'isomorphie de représentations irréductibles de $\mathbf{S}_\ell$ correspondante; sa classe dans le groupe de Grothendieck $R(\mathbf{S}_\ell)$ des représentations de $\mathbf{S}_\ell$, et son caractère. La représentation triviale de $\mathbf{S}_\ell$ correspond à la partition grossière ℓ de ℓ.

(B) Pour N assez grand pour que $\lambda_{N+1}=0$: le poids dominant $(\lambda_1,\ldots,\lambda_N)$ de $GL(N)$.

On supposera choisie pour chaque ℓ et chaque partition λ de ℓ une représentation irréductible de classe λ de $\mathbf{S}_\ell$. La catégorie des ensembles U à ℓ éléments et des bijections entre eux étant équivalente à sa sous-catégorie pleine réduite à l'objet $\{1,\ldots,\ell\}$, il revient au même de se donner une telle représentation V_λ, ou un foncteur $U\mapsto V_\lambda[U]$. En particulier, le choix de V_λ définit, pour tout ensemble U à ℓ éléments, une représentation de S_U, que nous noterons encore λ. Elle est déduite de V_λ par torsion par le $\mathbf{S}_\ell$-torseur des bijections de $\{1,\ldots,\ell\}$ avec U.

Dans ce qui précède, le corps de base est $\mathbb{Q}$. On pourrait même prendre l'anneau de base $\mathbb{Z}(1/\ell!)$, Le cas d'autres corps ou anneaux de base s'en déduit par extension des scalaires. Si X est une représentation de S_U, on pose

$$X_\lambda := \mathrm{Hom}(\lambda, X). \tag{1.10.1}$$

On sait que

$$\mathbb{Q}[S_U]\xrightarrow{\sim}\prod_{|\lambda|=\ell}\mathrm{End}(\lambda) \tag{1.10.2}$$

et il résulte que l'application S_U-équivariante naturelle

$$\bigoplus_{|\lambda|=\ell} X_\lambda\otimes\lambda\xrightarrow{\sim}X \tag{1.10.3}$$

est un isomorphisme. Cette construction garde un sens pour X dans une catégorie pseudo-abélienne $\mathbb{Z}(1/\ell!)$-linéaire.

2 La Catégorie $\mathrm{Rep}(S_t)$

2.1. Fixons un ensemble fini I. Pour U un ensemble fini, notons $[U]_I$ la représentation de permutation de S_I sur l'ensemble $\mathrm{Inj}(U, I)$ des injections de U dans I. Pour U (resp. I) l'ensemble fini $\{1, 2, \ldots, n\}$, on remplace dans la notation U (resp. I) par n.

Pour $\varphi\colon U \hookrightarrow V$ une injection, la composition avec $\varphi\colon \mathrm{Inj}(V, I) \to \mathrm{Inj}(U, I)$ induit

$$\mathrm{res}_\varphi\colon\ [V]_I \to [U]_I$$

de transposé (1.2)

$$\mathrm{res}_\varphi^*\colon\ [U]_I \to [V]_I.$$

On a $\mathrm{res}_\varphi(e_g) = e_{g\varphi}$ et $\mathrm{res}_\varphi^*(e_f) = \sum\limits_{g\varphi=f} e_f$.

2.2. Soient C un recollement des ensembles finis U et V, et D le produit fibré de U et V sur C:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "a"] & C \\ D \arrow[u, hook, "a'"] \arrow[r, hook, "b'"] & V. \arrow[u, hook, "b"'] \end{tikzcd} \tag{2.2.1}$$

Si $U' := a'(D)$, $V' := b'(D)$ et si φ est la bijection $b'a'^{-1} : U' \xrightarrow{\sim} V'$, on a $U \amalg_\varphi V \xrightarrow{\sim} C$. Posons

$$\{C\}_I := \mathrm{res}_{b'}^* \mathrm{res}_{a'} \qquad (\text{resp } (C)_I := \mathrm{res}_b\, res_a^*)\colon\ [U]_I \longrightarrow [V]_I.$$

Ces morphismes seront aussi notés $\{\varphi\}_I$ et $(\varphi)_I$ et, quand cela ne crée pas d'ambiguïté, l'indice I sera omis.

On définit une relation d'ordre entre données sur recollements de U et V en disant que A est plus grossier que C ($A \le C$), si, D et φ étant comme ci-dessus, le diagramme

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook] & A \\ D \arrow[u, hook] \arrow[r, hook] & V \arrow[u, hook] \end{tikzcd}$$

est commutatif, i.e. si A est défini par une bijection $\psi\colon U'' \xrightarrow{\sim} V''$, avec $U' \subset U'' \subset U$ et $V' \subset V'' \subset V$, qui prolonge φ.

Pour f dans $\mathrm{Inj}(U,I)$, l'image de e_f par $\{C\}$ (resp (C)) est la somme des e_g, g dans $\mathrm{Inj}(V,I)$, tels que f et g se recollent en une application (resp. une application injective) de C dans I. Cette description montre que

$$\{C\} = \sum_{A \leq C} (A). \tag{2.2.2}$$

Si $A \leq C$ est défini par $\psi\colon U'' \xrightarrow{\sim} V''$, l'ensemble ordonné des recollements A_1 entre A et C est isomorphe à l'ensemble ordonné par $\supset$ des parties de $U'' - U'$. A A_1, défini par $\psi_1\colon U_1'' \to V_1''$, où $U' \subset U_1'' \subset U''$ et où ψ_1 est la restriction de ψ, associer $U_1'' - U'$. La fonction de Moebius pour l'ensemble ordonné des données de recollements est donc $\mu(A,C) = (-1)^{|U''|-|U'|} = (-1)^{|C|-|A|}$, et (2.2.2) s'inverse en

$$(C) = \sum_{A \leq C} (-1)^{|C|-|A|} \{A\}. \tag{2.2.3}$$

2.3. Cas particuliers:

(i) Si dans (2.2.1) a' (resp. b') est bijectif, de sorte que le recollement C est défini par $\varphi\colon U \hookrightarrow V$ (resp. $\varphi\colon V \hookrightarrow U$), on a $(C) = \{C\} = \mathrm{res}_\varphi^*$ (resp. $(C) = \{C\} = \mathrm{res}_\varphi$).

(ii) Si le recollement est défini par une bijection φ de U avec V, (φ) est la fonctorialité de $U \mapsto [U]_I$ pour les bijections, telle que définie par transport de structures.

Construction 2.4 *Soit $(U_j)_{j\in J}$ une famille finie d'ensembles finis. Le produit tensoriel des $[U_j]_I$ est naturellement isomorphe à la somme directe, étendues aux recollements $(u_j\colon U_j \hookrightarrow C)$, des $[C]_I$.*

Preuve Le produit tensoriel des $[U]_I$ est la représentation de permutation définie par le S_I-ensemble produit des $\mathrm{Inj}(U_j,I)$. Chaque système d'injections $u_j\colon U_j \hookrightarrow I$ définit le recollement $u_j\colon U_j \hookrightarrow \cup u_j(U_j)$. La donnée de recollement correspondante ne dépend que de la S_I-orbite de $(u_j)_{j\in J}$, et ceci fait de $\prod \mathrm{Inj}(U_j,I)$ la somme disjointe des $\mathrm{Inj}(C,I)$, pour $(a_j\colon U_j \hookrightarrow C)$ une donnée de recollement. On conclut par 1.3.

Exemples 2.5

(i) La représentation $[\emptyset]_I$ est la représentation unité: k muni de l'action triviale de S_I. Le morphisme $[U]_I \otimes [\emptyset]_I \xrightarrow{\sim} [U]_I$ correspondant est défini par le recollement évident de U et $\emptyset$ en U.

(ii) La structure d'algèbre $[U]_I \otimes [U]_I \to [U]_I$ de $[U]_I$ définie en 1.2 est la projection sur le facteur direct correspondant au recollement évident de U et U en U.

(iii) L'autodualité 1.2 de $[U]_I$ est

$$[U]_I \otimes [U]_I \xrightarrow{\text{(ii)}} [U]_I \xrightarrow{\mathrm{res}_{\emptyset \to U}} [\emptyset],$$

et le morphisme $\delta\colon\ 1 \to [U]_I \otimes [U]_I$ correspondant est

$$[\emptyset] \xrightarrow{\mathrm{res}^*_{\phi \to U}} [U]_I \to [U]_I \otimes [U]_I;$$

où la seconde flèche est l'inclusion du facteur direct $[U]_I$.

2.6. Soit une famille de familles $((U_{j,k})_{j\in J_k})_{k\in K}$. Elle définit la famille des $U_{j,k}$, indexée par $\coprod_k J_k$. On a une bijection naturelle entre

(A) les données de recollement C sur les U_{ij}

(B) les systèmes formés par

  (a) pour chaque k, une donnée de recollement C_k sur les $U_{j,k}$, ($j \in J_k$)

  (b) une donnée de recollement D sur les C_k ($k \in K$).

A C, on associe les recollements induits, et leur recollement en C.

On laisse on lecteur le soin de vérifier que l'isomorphisme

$$\bigotimes_{k\in K} \bigotimes_{j\in J_k} [U_{j,k}]_I = \otimes [U_{j,k}]_I$$

devient, via les isomorphismes 2.4, l'isomorphisme de

$$\bigoplus_{(C_k)} \bigotimes_{k\in K} [C_k]_I = \bigoplus_{(D,C_k)} [D]_I$$

avec la somme des $[C]_I$, définie par les bijections (A)$\leftrightarrow$(B).

2.7. Ceci décrit les contraintes d'associativité et de commutativité et l'unité du produit tensoriel de représentations $[U]_I$ en terme de la description 2.4 du produit tensoriel. Pour l'associativité,

$$([U]_I \otimes [V]_I) \otimes [W]_I \to [U]_I \otimes ([V]_I \otimes [W]_I)\,,$$

on identifie les deux membres à la somme des $[C]_I$, pour C recollement de U, V, W. Pour la commutativité

$$[U]_I \otimes [V]_I \to [V]_I \otimes [U]_I,$$

utiliser qu'un recollement U et V s'identifie à un recollement de V et U. L'unité est $[\emptyset]_I$.

Proposition 2.8 *Soient $(U_j)_{j\in J}$ et $(V_j)_{j\in J}$ deux familles indexées par J, et, pour chaque j, soit $U_j, V_j \hookrightarrow C_j$ un recollement de U_j et V_j. Identifions, par 2.3, le produit tensoriel des $[U_j]$ (resp. $[V_j]_I$) avec la somme des $[A]_I$ (resp. $[B]_I$) pour A (resp. B) un recollement des U_j (resp. V_j). Alors le coefficient matriciel*

$$[A]_I \to \otimes[U_j]_I \to \otimes[V_j]_I \to [B]_I$$

de $\otimes(C_j)\colon\ \otimes[U_j]_I \to \otimes[V_j]_I$ est la somme des $(C)\colon [A]_I \to [B]_I$, pour C une donnée de recollement sur A et B qui, vue par 2.6 comme donnée de recollement sur les U_j et V_j, induit pour chaque j la donnée de recollement C_j de U_j et V_j.

La vérification, immédiate sur la description 2.2 des (C_j), est laissée au lecteur.

Proposition 2.9

(i) *Les morphismes $(C)\colon [U]_I \to [V]_I$, pour $U, V \hookrightarrow C$ un recollement de U et V tel que $|C| \leq |I|$, forment une base de* $\mathrm{Hom}_{S_I}([U]_I, [V]_I)$.

(ii) *La condition $|C| \leq |I|$ est vérifiée par tout recollement $U, V \hookrightarrow C$ si $|U| + |V| \leq |I|$.*

Preuve Par autodualité de la représentation de permutation $[U]_I$, le groupe $\mathrm{Hom}_{S_I}([U]_I, [V]_I)$ s'identifie à l'espace des S_I-invariants dans $[U]_I \otimes [V]_I$, qui est la représentation de permutation définie par $\mathrm{Inj}(U, I) \times \mathrm{Inj}(V, I)$. Les S_I-invariants ont une base indexée par les S_I-orbites: à une orbite K correspondant la somme des e_k pour k dans K. Des injections $u\colon U \hookrightarrow I$ et $v\colon V \hookrightarrow I$ définissent la donnée de recollement $U, V \hookrightarrow u(U) \cup v(V)$. Notons-la $C_{u,v}$. Elle ne dépend que de l'orbite de (u, v) et la détecte. On laisse au lecteur le soin de vérifier que le morphisme de $[U]_I$ dans $[V]_I$ défini par l'orbite de (u, v) est $(C_{u,v})$. Les données de recollement C ainsi obtenues sont celles pour lesquelles $|C| \leq |I|$. Pour les autres, $[C] = 0$.

Ceci prouve (i), et (ii) est trivial.

Proposition 2.10 *Soient trois ensembles finis U, V et W. Soient U, $V \hookrightarrow C$ un recollement de U et V et $V, W \hookrightarrow D$ un recollement V et W. Alors, le morphisme composé $(D)(C)\colon (U)_I \to [W]_I$ est la somme, étendue aux recollements $a, b, c\colon U, V, W \hookrightarrow A$ qui induisent C et D:*

$$(D)(C) = \sum_A P_A\,(|I|)\,(A'), \tag{2.10.1}$$

où A' est le recollement de U et W induit par A et où $P_A(T)$ est le polynôme à coefficients entiers

$$P_A(T) := (T - |A'|)(T - |A'| - 1) \cdots (T - |A| + 1). \tag{2.10.2}$$

Preuve Notons

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, "u"'] & & V \arrow[dl, "v'"] \arrow[dr, "v''"'] & & W \arrow[dl, "w"] \\ & C & & D & \end{tikzcd}$$

les recollements. Par définition (2.2),

$$(D)(C) = \mathrm{res}_w \, \mathrm{res}^*_{v''} \, \mathrm{res}_{v'} \, \mathrm{res}^*_u.$$

Le composé $\mathrm{res}^*_{v''} \mathrm{res}_{v'}$ est calculé par (2.2.2): c'est la somme, sur les recollements $x, y\colon C, D \hookrightarrow A$ de C et D rendant

$$\begin{tikzcd} U \arrow[dr, "u"'] & & V \arrow[dl, "v'"] \arrow[dr, "v''"'] & & W \arrow[dl, "w"] \\ & C \arrow[dr, "x"'] & & D \arrow[dl, "y"] & \\ & & A & & \end{tikzcd} \tag{2.10.3}$$

commutatif, des $\mathrm{res}_y \, \mathrm{res}_x$.

L'application qui à $x, y\colon C, D \hookrightarrow A$ associe $xu, xv' = yv'', yw : U, V, W \hookrightarrow A$ est bijective, des données de recollement considérées vers les données de recollement de U, V, W induisant celles données sur U, V et V, W. On a, pour chaque diagramme (2.10.3)

$$\mathrm{res}_w \, \mathrm{res}_y \, \mathrm{res}^*_x \, \mathrm{res}^*_u = \mathrm{res}_{yw} \, \mathrm{res}^*_{xu},$$

et le composé $(D)(C)$ est donc la somme, sur les $a, b, c\colon U, V, W \hookrightarrow A$ induisant C et D, des $\mathrm{res}_c \, \mathrm{res}^*_a$. Soit $A' := a(U) \cup c(W)$:

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, hook, "a'"] \arrow[dr, "a"'] & A' \arrow[d, hook, "j"] & W \arrow[l, hook', "c'"'] \arrow[dl, "c"] \\ & A & \end{tikzcd}$$

On a $\mathrm{res}_c \, \mathrm{res}_a^* = \mathrm{res}_{c'} \, \mathrm{res}_j \, \mathrm{res}_j^* \, \mathrm{res}_{a'}^*$, et $\mathrm{res}_j \, \mathrm{res}_j^*$ est la multiplication par le nombre $P_A(|I|)$ de façon d'étendre une injection de A' dans I en une injection de A dans I. On a donc

$$(D)(C) = \sum_A \mathrm{res}_c \, \mathrm{res}_a^* = \sum_A P_A(|I|) \mathrm{res}_{a'} \, \mathrm{res}_{c'}^* = \sum_A P_A(|I|)(A').$$

Remarque 2.11. Un calcul analogue, avec (2.2.2) remplacé par (2.2.3), exprime la composition de morphismes $\{C\}$. Supposons que $C = U \amalg_E V$ et $D = V \amalg_F W$:

$$\begin{tikzcd}
& E \arrow[dl, "u"'] \arrow[dr, "v'"] & & F \arrow[dl, "v''"'] \arrow[dr, "w"] & \\
U & & V & & W.
\end{tikzcd}$$

par définition,

$$\{D\}\{C\} = \mathrm{res}_w^* \, \mathrm{res}_{v''} \, \mathrm{res}_{v'}^* \, \mathrm{res}_u .$$

Posons $V_1 := v'(E) \cup v''(F)$:

$$\begin{tikzcd}
E \arrow[r, hook, "x"] \arrow[dr, "v'"'] & V_1 \arrow[d, "j"] & F \arrow[l, hook', "y"'] \arrow[dl, "v''"] \\
& V &
\end{tikzcd}$$

On a $\mathrm{res}_{v''} \, \mathrm{res}_{v'}^* = \mathrm{res}_y \, \mathrm{res}_j \, \mathrm{res}_j^* \, \mathrm{res}_x^* = P_{C,D}(|I|) \mathrm{res}_y \, \mathrm{res}_x^*$, pour $P_{C,D}$ le polynôme à coefficients entiers

$$P_{C,D}(T) := (T - |V_1|) \cdots (T - |V| + 1). \tag{2.11.1}$$

Le composé $\mathrm{res}_y \, \mathrm{res}_x^*$ est $(V_1)\colon [E]_I \to [F]_I$. D'après (2.2.3), c'est une somme alternée de morphismes $\{A\}$, pour A un recollement de E et F plus grossier que V_1. Pour A_1 le produit fibré $E \times_A F$, i.e. pour $A = E \amalg_{A_1} F$:

$$\begin{tikzcd}
& & A_1 \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
& E \arrow[r, hook] \arrow[dl] \arrow[dr] & V_1 \arrow[d, two heads] & F \arrow[l, hook'] \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
U & & A & & V
\end{tikzcd}$$

A_1 définit un recollement A' de U et V, et $\{D\}\{C\}$ est la somme sur A

$$\{D\}\{C\} = P_{C,D}(|I|) \sum (-1)^{|V_1| - |A|} \{A'\}. \tag{2.11.2}$$

Définition 2.12 On note $\mathrm{Rep}_0(S_T)$ la catégorie $\mathbb{Z}[T]$-linéaire suivante:

Objets: ensembles finis. On note $[U]$ l'ensemble fini U vu comme objet de $\mathrm{Rep}_0(S_T)$.

Morphismes: $\mathrm{Hom}([U],[V])$ est le $\mathbb{Z}[T]$-module librement engendré par les données de recollement sur U, V. On note (C) la donnée de recollement C vue comme morphisme de $[U]$ dans $[V]$.

Composition: la composition

$$\mathrm{Hom}([U],[V]) \times \mathrm{Hom}([V],[W]) \to \mathrm{Hom}([U],[W])$$

est l'application $\mathbb{Z}[T]$-bilinéaire donnée sur les vecteurs de base par

$$[D][C] = \sum_A P_A(T)(A'),$$

la somme sur A, et A', P_A étant comme en 2.10.

Comme en 2.2, on définit $\{C\} = \Sigma(A)$, la somme étant comme en (2.2.2). Si C_φ est le recollement définie par $U' \subset U$, $V' \subset V$ et $\varphi\colon\ U' \xrightarrow{\sim} V'$, on pose $(\varphi) := (C_\varphi)$ et $\{\varphi\} := \{C_\varphi\}$. Comme en 2.3 (i), si C est la donnée de recollement définie par une injection $\varphi\colon\ V \to U$ (resp. $\varphi\colon\ U \to V$), on pose $\mathrm{res}_\varphi := (C)$ (resp. $\mathrm{res}^*_\varphi := (C)$).

Que la composition est associative et l'existence d'identités sera vérifié en 2.14.

2.13. Pour I un ensemble fini, notons $\sigma(I)$ le morphisme $T \mapsto |I|$ de $\mathbb{Z}[T]$ dans k. Envoyons l'ensemble des objets de $\mathrm{Rep}_0(S_T)$ dans l'ensemble des représentations de S_I par $[U] \mapsto [U]_I$, et $\mathrm{Hom}([U],[V])$ dans $\mathrm{Hom}([U]_I,[V]_I)$ par le morphisme $\sigma(I)$-linéaire donné sur les vecteurs de base par $(C) \mapsto (C)_I$. Par 2.10, les

$$\mathrm{Hom}([U],[V]) \to \mathrm{Hom}([U]_I,[V]_I)$$

obtenus sont compatibles à la composition. Par 2.3 (ii), si Id_U est l'identité de U, l'image $(\mathrm{Id}_U)_I$ de (Id_U) est l'identité de $[U]_I$.

Proposition 2.14

(i) *La composition 2.12 est associative et admet les* (Id_U) *pour identités.*

(ii) $\mathrm{Rep}_0(S_T)$ *est donc une catégorie* $\mathbb{Z}[T]$*-linéaire et, pour tout ensemble fini* I*,* $[U] \mapsto [U]_I$ *est un foncteur* $\sigma(I)$*-linéaire de* $\mathrm{Rep}_0(S_T)$ *dans la catégorie des représentations de* S_I *sur* k*.*

(iii) *Le morphisme*

$$\mathrm{Hom}([U],[V]) \otimes_{\mathbb{Z}[T],\sigma(I)} k \to \mathrm{Hom}([U]_I,[V]_I)$$

est toujours surjectif. Il est bijectif si $|U|+|V| \leq |I|$.

Preuve L'associativité de la composition est l'égalité de deux applications $\mathbb{Z}[T]$-linéaires

$$\mathrm{Hom}([U_1],[U_2]) \otimes \mathrm{Hom}([U_2],[U_3]) \otimes \mathrm{Hom}([U_3],[U_4]) \rightrightarrows \mathrm{Hom}([U_1],[U_4]). \tag{2.14.1}$$

Source et but sont des $\mathbb{Z}[T]$-modules libres, et il s'agit de prouver l'égalité de deux matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}[T]$. Soit I un ensemble fini. La compatibilité de

$$\mathrm{Hom}([U],[V]) \to \mathrm{Hom}([U]_I,[V]_I)$$

à la composition et l'isomorphisme 2.9

$$\mathrm{Hom}([U],[V]) \otimes_{\mathbb{Z}[T],\sigma(I)} k \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}([U]_I,[V]_I)$$

pour $|I| \geq |U|+|V|$ assurent que les deux morphismes (2.14.1) deviennent égaux après l'extension des scalaires $\mathbb{Z}[T] \to k\colon T \mapsto n$ pour n un entier $\geq |U_1|+|U_4|$. Ceci ayant lieu pour une infinité de valeurs de n, ils sont égaux. Que les (Id_T) sont des identités se prouve de même. Les assertions (ii) et (iii) ont déjà été vérifiées.

Remarques 2.15.

(i) L'objet $[U]$ de $\mathrm{Rep}_0(S_T)$ est fonctoriel en U pour les bijections $\varphi : U \to V$, la fonctorialité étant donnée, avec les notations de 2.12, par $\varphi \mapsto (\varphi)$. Si U est défini à isomorphisme unique près, par exemple en tant que représentant $U_1, U_2 \hookrightarrow U$ d'une donnée de recollement fixée sur U_1, U_2, l'objet $[U]$ est donc défini à isomorphisme unique près.

(ii) Le foncteur $[U] \mapsto [U]_I$ envoie le morphisme $\{C\}$ sur $\{C\}_I$. Par l'argument de spécialisation qui prouve 2.14, on a donc pour tout diagramme (2.2.1) l'identité $\{C\} = \mathrm{res}^*_{b'}\,\mathrm{res}_{a'}$, et la composition des morphismes $\{C\}$ est donnée par (2.11.2), avec $|I|$ remplacé par T.

2.16. Soit $\mathrm{Rep}_1(S_T)$ l'enveloppe additive (1.7) de la catégorie $\mathbb{Z}[T]$-linéaire $\mathrm{Rep}_0(S_T)$. Nous nous proposons de définir un produit tensoriel $\mathbb{Z}[T]$-bilinéaire sur $\mathrm{Rep}_1(S_T)$. D'après 1.9, il suffit de le définir sur $\mathrm{Rep}_0(S_T)$, à valeurs dans $\mathrm{Rep}_1(S_T)$.

On définit $[U]\otimes[V]$ comme étant la somme directe, étendues aux données de recollement $U, V \hookrightarrow C$, de $[C]$ (cf 2.4, 2.15 (i)). La fonctorialité

$$\mathrm{Hom}([U_1],[V_1]) \otimes \mathrm{Hom}([U_2],[V_2]) \to \mathrm{Hom}([U_1]\otimes[U_2],[V_1]\otimes[V_2])$$

est définie par la formule de 2.8 pour $J = \{1,2\}$, en effaçant les indices I. Qu'on obtient bien un foncteur se vérifie, comme dans la preuve de 2.14, par spécialisations $T \mapsto n$, n entier suffisamment grand.

On définit pour ce foncteur de produit tensoriel des contraintes d'associativité, de commutativité et d'unité par les formules de 2.7, en effaçant l'indice I. Que les axiomes requis sont vérifiés se voit encore par spécialisations.

Pour chaque $[U]$, on définit

$$\delta\colon 1 \to [U]\otimes[U] \qquad \text{et} \qquad \mathrm{ev}\colon [U]\otimes[U] \to 1 \tag{2.16.1}$$

par les formules de 2.5 (iii), en effaçant l'indice I. Toujours la même preuve montre qu'on obtient ainsi une autodualité de $[U]$.

Le foncteur $\sigma(I)$-linéaire $[U] \mapsto [U]_I$ de $\mathrm{Rep}_0(S_T)$ dans $\mathrm{Rep}(S_I)$ se prolonge par additivité en un foncteur $X \mapsto X_I$ de $\mathrm{Rep}_1(S_T)$ dans $\mathrm{Rep}(S_I)$. Par construction, ce foncteur est compatible au produit tensoriel, i.e. est muni d'un isomorphisme fonctoriel $(X\otimes Y)_I = X_I \otimes Y_I$ compatible aux contraintes d'associativité et de commutativité et transformant unité en unité. Pour chaque U, l'autodualité (2.16.1) de $[U]$ a pour image l'autodualité 1.2 de $[U]_I$.

Définition 2.17 Soient A un anneau commutatif et $t \in A$.

(i) La catégorie $\mathrm{Rep}_1(S_t, A)$ est la catégorie A-linéaire $\mathrm{Rep}_1(S_T)\otimes_{\mathbb{Z}[T]} A$ déduite de $\mathrm{Rep}_1(S_T)$ par l'extension des scalaires $\mathbb{Z}[T] \to A\colon T \mapsto t$ (cf. 1.6).

(ii) La catégorie $\mathrm{Rep}(S_t, A)$ est l'enveloppe pseudo-abélienne (1.8) de $\mathrm{Rep}_1(S_t, A)$.

De $\mathrm{Rep}_1(S_T)$, la catégorie $\mathrm{Rep}(S_t, A)$ hérite d'un produit tensoriel A-bilinéaire *ACU* rigide dont l'unité 1 vérifie $\mathrm{End}(1) = A$. Nous noterons $[U]_t$, ou simplement $[U]$, l'image dans $\mathrm{Rep}(S_t, A)$ de l'objet $[U]$ de $\mathrm{Rep}_0(S_T)$.

Dans la catégorie $\mathrm{Rep}(S_t, A)$, les groupes Hom sont des A-modules projectifs de type fini. La vérification se ramène au cas des $\mathrm{Hom}([U],[V])$, où ils sont même libres de type fini.

Le cas qui nous intéresse le plus est celui où $A = k$. Nous écrirons $\mathrm{Rep}(S_t)$ pour $\mathrm{Rep}(S_t, k)$.

Théorème 2.18 *Si t n'est pas un entier ≥ 0, la catégorie* $\mathrm{Rep}(S_t)$ *est abélienne semi-simple. C'est donc une catégorie tensorielle sur k.*

La preuve sera donnée au paragraphe 5.

3 Rappels d'algèbre Multilinéaire

3.1. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie munie d'un produit tensoriel ACU. Elle est A-linéaire pour $A := \mathrm{End}(1)$. Si un objet X de $\mathcal{T}$ admet un dual, ce dernier est unique à isomorphisme unique près. Plus précisément, si $(X_1^\vee, \mathrm{ev}_1, \delta_1)$ et $(X_2^\vee, \mathrm{ev}_2, \delta_2)$ sont deux duaux de X, il existe un unique morphisme $\alpha\colon X_1^\vee \to X_2^\vee$ tel que $\mathrm{ev}_2 \circ (\alpha \otimes X) = \mathrm{ev}_1$, c'est un isomorphisme, et $(X \otimes \alpha) \circ \delta_1 = \delta_2$ ((Deligne 1990) 2.2).

3.2. Rappelons qu'un Hom interne $\mathcal{H}om(X,Y)$ est un objet qui représente le foncteur $Z \mapsto \mathrm{Hom}(Z \otimes X, Y)$, i.e. qui est muni d'un isomorphisme fonctoriel en Z

$$\mathrm{Hom}(Z, \mathcal{H}om(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Z \otimes X, Y). \tag{3.2.1}$$

Si X admet un dual $X^\vee$, l'application $\mathrm{Hom}(Z, Y \otimes X^\vee) \to \mathrm{Hom}(Z \otimes X, Y)$ envoyant $f\colon Z \to Y \otimes X^\vee$ sur le composé

$$Z \otimes X \xrightarrow{f \otimes X} Y \otimes X^\vee \otimes X \xrightarrow{Y \otimes \mathrm{ev}} Y \otimes 1 = Y \tag{3.2.2}$$

fait de $Y \otimes X^\vee$ un Hom interne de X et Y (loc. cit. 2.3). Son inverse envoie $g\colon Z \otimes X \to Y$ sur le composé

$$Z \xrightarrow{Z \otimes \delta} Z \otimes X \otimes X^\vee \xrightarrow{f \otimes X^\vee} Y \otimes X^\vee. \tag{3.2.3}$$

Pour $Z = 1$, (3.2.1) devient

$$\mathrm{Hom}(1, \mathcal{H}om(X,Y)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(X, Y). \tag{3.2.4}$$

3.3. On appelle *trace* le morphisme

$$\mathrm{Tr}\colon \mathcal{H}om(X,X) = X \otimes X^\vee = X^\vee \otimes X \xrightarrow{\mathrm{ev}} 1, \tag{3.3.1}$$

ainsi que le morphisme

$$\mathrm{Tr}\colon \mathrm{Hom}(X,X) \to \mathrm{End}(1) \tag{3.3.2}$$

qui s'en déduit par (3.2.4). On pose

$$\dim(X) := \mathrm{Tr}(\mathrm{Id}_X). \tag{3.3.3}$$

On dispose de la panoplie habituelle d'identités, dédoublée en une version interne et une version externe reliées par (3.2.4), dès que les duaux requis existent: la bidualité $X^{\vee\vee} = X$ fournit les isomorphismes de transpositions $f \mapsto f^t$:

$$\mathcal{H}om(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(Y^\vee, X^\vee) \quad \text{et} \quad \mathrm{Hom}(X,Y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(Y^\vee, X^\vee); \tag{3.3.4}$$

ils vérifient $\mathrm{Tr}(f^t) = \mathrm{Tr}(f)$ (pour $X = Y$), $(fg)^t = g^t f^t$, et $(f \otimes g)^t = f^t \otimes g^t$ (utilisant que $(X \otimes Y)^\vee = X^\vee \otimes Y^\vee$); l'identité $\mathrm{Tr}(fg) = \mathrm{Tr}(gf)$, sous sa forme interne, est la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{H}om(X,Y) \otimes \mathcal{H}om(Y,X) \arrow[d] & = & \mathcal{H}om(Y,X) \otimes \mathcal{H}om(X,Y) \arrow[d] \\
\mathcal{H}om(Y,Y) \arrow[r, "\mathrm{Tr}"] & 1 & \mathcal{H}om(X,X). \arrow[l, "\mathrm{Tr}"']
\end{tikzcd} \tag{3.3.5}$$

Si on identifie $\mathcal{H}om(X,Y)$, $\mathcal{H}om(Y,Z)$ et $\mathcal{H}om(X,Z)$ respectivement à $Y \otimes X^\vee$, $Z \otimes Y^\vee$ et $Z \otimes X^\vee$, la composition s'identifie à

$$\mathrm{ev}_Y\colon\ (Z \otimes Y^\vee) \otimes (Y \otimes X^\vee) \to Z \otimes X^\vee.$$

Le morphisme (3.3.5) de $\mathcal{H}om(X,Y) \otimes \mathcal{H}om(Y,X)$ dans 1 s'identifie donc à $\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{ev}_Y$. Il met $\mathcal{H}om(X,Y)$ et $\mathcal{H}om(Y,X)$ en dualité. Passant aux Hom, on a donc

Lemme 3.4 *Supposons que X et Y admettent un dual. Soit $Z := \mathcal{H}om(X,Y)$, de dual $Z^\vee$ identifié par (3.3.5) à $\mathcal{H}om(Y,X)$. Puisque $Z^\vee = \mathcal{H}om(Z,1)$, (3.2.4) fournit des isomorphismes*

$$\mathrm{Hom}(1, Z^\vee) = \mathrm{Hom}(Z,1) = \mathrm{Hom}(Y,X)$$

et $\mathrm{Hom}(1,Z) = \mathrm{Hom}(X,Y)$. *Modulo ces identifications, les accouplements suivants coïncident:*

$$\mathrm{Tr}(fg) \quad : \quad \mathrm{Hom}(Y,X) \times \mathrm{Hom}(X,Y) \to A \tag{3.4.1}$$

$$\mathrm{ev}_Z \quad : \quad \mathrm{Hom}(1,Z^\vee) \times \mathrm{Hom}(1,Z) \to A \tag{3.4.2}$$

$$v \circ u \quad : \quad \mathrm{Hom}(Z,1) \times \mathrm{Hom}(1,Z) \to A. \tag{3.4.3}$$

Lemme 3.5 *Dans une catégorie tensorielle, si f est un endomorphisme d'une suite exacte courte $0 \to A' \to A \to A'' \to 0$, on a*

$$\mathrm{Tr}(f, A) = \mathrm{Tr}(f, A') + \mathrm{Tr}(f, A'').$$

Preuve On le déduit de l'énoncé interne correspondant, à savoir que sur $F := \mathrm{Ker}(\mathcal{H}om(A, A) \to \mathcal{H}om(A', A''))$ la trace est la somme des traces partielles $F \to \mathcal{H}om(A', A') \to 1$ et $F \to \mathcal{H}om(A'', A'') \to 1$. L'énoncé interne se prouve en observant que le morphisme

$$\mathcal{H}om(A, A') \oplus \mathcal{H}om(A'', A) \to \mathcal{H}om(A, A)$$

a pour image F, de sorte qu'il suffit de prouver l'énoncé interne avec F remplacé par $\mathcal{H}om(A, A')$ et par $\mathcal{H}om(A'', A)$. Si i est l'inclusion de A' dans A, le cas de $\mathcal{H}om(A, A')$ se ramène à $\mathrm{Tr}(if) = \mathrm{Tr}(fi)$, et le cas de $\mathcal{H}om(A'', A)$ se traite dualement.

Corollaire 3.6 *Dans une catégorie tensorielle, la trace d'un endomorphisme nilpotent est nulle.*

Preuve Si l'endomorphisme f de X est nilpotent, il existe une filtration décroissante finie F de X telle que $f(F^i) \subset F^{i+1}$, par exemple la filtration par les $f^i(X)$. On a $\mathrm{Gr}_F(f) = 0$ et par 3.5

$$\mathrm{Tr}(f) = \sum \mathrm{Tr}\,\mathrm{Gr}^i_F(f) = 0.$$

3.7. Soient Y un objet d'une catégorie additive (resp. pseudo-abélienne) $\mathcal{T}$, et B l'anneau de ses endomorphismes. Pour tout objet Z, $\mathrm{Hom}(Y, Z)$ est un B-module à droite, $\mathrm{Hom}(Z, Y)$ un B-module à gauche, et on dispose d'un accouplement

$$(\quad,\quad)\colon\ \mathrm{Hom}(Z, Y) \times \mathrm{Hom}(Y, Z) \to B\colon\ f, g \longmapsto gf. \tag{3.7.1}$$

Si L est un B-module à droite libre (resp. projectif) de type fini, le foncteur covariant

$$Z \longmapsto \mathrm{Hom}_B(L, \mathrm{Hom}(Y, Z)) \tag{3.7.2}$$

est représentable: le choix d'une base $e_1, \ldots, e_n$ de L l'identifie à $Z \mapsto \mathrm{Hom}(Y, Z)^n$, représenté par Y^n (resp. le cas "L projectif" se ramène au cas "L libre" par passage à un facteur direct).

On note $L \otimes_B Y$ un objet qui représente (3.7.2). Le foncteur $L \mapsto L \otimes_B Y$ est une équivalence de la catégorie des B-modules à droite libres (resp.

projectifs) de type fini avec la sous-catégorie pleine de $\mathcal{T}$ d'objets les sommes de copies de Y (resp. facteurs direct de sommes). L'équivalence inverse est $X \mapsto \mathrm{Hom}(Y, X)$.

Si les facteurs directs des B-modules à droite libres de type fini sont encore libres de type fini, par exemple si B est un corps ou un anneau principal, cette équivalence montre que tout facteur direct d'une somme de copies de Y est encore une somme de copies de Y.

Proposition 3.8 *Supposons $\mathcal{T}$ pseudo-abélienne, que* $\mathrm{Hom}(Y, Z)$ *soit un B-module projectif de type fini et que l'accouplement (3.7.1) fasse de* $\mathrm{Hom}(Z, Y)$ *son dual. Alors, Z admet un unique sous-objet R tel que le morphisme naturel*

$$\mathrm{Hom}(Y, Z) \otimes_B Y \oplus R \xrightarrow{\sim} Z \tag{3.8.1}$$

soit un isomorphisme. On a

$$\mathrm{Hom}(Y, R) = \mathrm{Hom}(R, Y) = 0. \tag{3.8.2}$$

Preuve Si $\mathrm{Hom}(Y, Z)$ est libre, de base $f_1, \ldots, f_n$, et que (f^i) est la base duale de $\mathrm{Hom}(Z, Y)$, le morphisme $f_\bullet = (f_i)\colon\ Y^n \to Z$ admet pour rétraction le morphisme $f^\bullet = (f^i)\colon\ Z \to Y^n$. Par définition, on a en effet $f^i f_j = \delta^i_j \mathrm{Id}_Y$. Si R est le noyau de l'endomorphisme idempotent $f_\bullet f^\bullet$ de Z, on a $\mathrm{im}(f_\bullet f^\bullet) \oplus R \xrightarrow{\sim} Z$ et $f_\bullet$ est un isomorphisme de Y^n avec l'image de $f^\bullet f_\bullet$: (3.8.1) est vérifié. Par construction, tout morphisme de Y ans Z (resp. de Z dans Y) est combinaison linéaire des f_i (resp. f^i). La nullité (3.8.2), et l'unicité du facteur direct R en résultent.

Le cas où $\mathrm{Hom}(Y, Z)$ est seulement supposé projectif de type fini s'en déduit par addition à Z de $Q \otimes_B Y$, Q étant choisi tel que $\mathrm{Hom}(Y, Z) \oplus Q$ soit libre.

Remarques 3.9.

(i) L'ensemble des Z pour lesquels les hypothèses de 3.8 sont vérifiées est stable par sommes directes finies et facteurs directs, et la décomposition (3.8.1) de Z en somme directe est fonctorielle en Z.

(ii) Si Z vérifie les hypothèses de 3.8 pour des Y_i, d'anneau d'endomorphismes B_i, en nombre fini, et que $\mathrm{Hom}(Y_i, Y_j) = 0$ pour $i \neq j$, appliquant (3.8) tour à tour à chacun des Y_i et au reste de la décomposition précédente, on obtient une décomposition

$$\oplus \mathrm{Hom}(Y_i, Z) \otimes_{B_i} Y_i \oplus R \xrightarrow{\sim} Z, \quad \text{avec} \tag{3.9.1}$$

$$\mathrm{Hom}(Y_i, R) = \mathrm{Hom}(R, Y_i) = 0 \quad \text{pour tout } i. \tag{3.9.2}$$

4 La Mesure Invariante sur S_t

4.1. Fixons un anneau commutatif A, $t \in A$ et, pour M un entier ≥ -1, notons $\mathrm{Rep}(S_t, A)^{(M)}$ la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}(S_t, A)$ d'objets les facteurs directs de sommes de $[U]$, avec $|U| \leq M$.

Soit N un entier ≥ 0, et supposons que

$$t,\, t-1, \ldots, t-(N-1) \text{ sont inversibles dans } A. \tag{4.1.1}$$

Pour A un corps, (4.1.1) s'écrit plus simplement $t \notin \{0, 1, \ldots, N-1\}$.

Proposition 4.2 *Sous l'hypothèse (4.1.1), pour tout objet X de* $\mathrm{Rep}(S_t, A)^{(N)}$*, l'accouplement fg entre* $\mathrm{Hom}(X, 1)$ *et* $\mathrm{Hom}(1, X)$*, à valeurs dans* $\mathrm{End}(1) = A$*, fait de chacun de ces A-modules projectifs de type fini le dual de l'autre.*

Preuve D'après 3.9(i), il suffit de vérifier 4.2 pour $X = [U]$, avec $|U| \leq N$. Rappelons que $1 = [\emptyset]$. Soit φ l'inclusion de $\emptyset$ dans U. Les A-modules $\mathrm{Hom}([U], 1)$ et $\mathrm{Hom}(1, [U])$ sont libres de rang un, engendrés respectivement par res_φ et res_φ^*. Puisque $\mathrm{res}_\varphi \mathrm{res}_\varphi^*$ est la multiplication par $t(t-1)\ldots(t-|U|+1)$, (4.1.1) assure que l'accouplement 4.2 est une dualité parfaite.

4.3. Appliquons 3.7, 3.8 à $Y = 1$: sous l'hypothèse (4.1.1), tout objet X de $\mathrm{Rep}(X_t)^{(N)}$ admet une décomposition fonctorielle en X

$$X = X^{S_t} \oplus R \tag{4.3.1}$$

en

$$X^{S_t} := \mathrm{Hom}(1, X) \otimes 1 \tag{4.3.2}$$

et un reste R tel que

$$\mathrm{Hom}(1, R) = \mathrm{Hom}(R, 1) = 0. \tag{4.3.3}$$

L'analogue de la projection sur X^{S_t}, dans le cas de la catégorie des représentations d'un groupe fini G, est la projection $x \mapsto \frac{1}{|G|}\Sigma gx$ de X sur X^G, d'où le titre de cette section.

Corollaire 4.4 *Sous l'hypothèse (4.1.1), pour tout X dans* $\mathrm{Rep}(S_t, A)^{(N)}$*, le morphisme* $\mathrm{ev}\colon X^\vee \otimes X \to 1$ *induit une dualité parfaite*

$$\mathrm{Hom}(1, X^\vee) \otimes \mathrm{Hom}(1, X) \to \mathrm{Hom}(1, 1) = A.$$

Preuve Chaque $[U]$ étant autodual, $X^\vee$ est encore dans $\mathrm{Rep}(S_t, A)^{(N)}$. Il résulte de (4.3.3) que la décomposition (4.3.1) est compatible au passage au dual. La dualité $\mathrm{ev}\colon X^\vee \otimes X \to 1$ induit donc une dualité entre $(X^\vee)^{S_t}$ et X^{S_t}. Appliquant (4.3.2), on en déduit 4.4.

Corollaire 4.5 *Sous l'hypothèse (4.1.1), si X est dans* $\mathrm{Rep}(S_t, A)^{(N')}$*, Y dans* $\mathrm{Rep}(S_t, A)^{(N'')}$ *et que $N' + N'' \leq N$, l'accouplement* $\mathrm{Tr}(fg)$ *entre les A-modules projectifs de type fini* $\mathrm{Hom}(X, Y)$ *et* $\mathrm{Hom}(Y, X)$ *est une dualité parfaite.*

Preuve Appliquer 4.4 à $\mathcal{H}om(X, Y)$ et $\mathcal{H}om(Y, X)$, mis en dualité par $\mathrm{Tr}(fg)$, et utiliser que (3.4.1) = (3.4.2).

5 Preuve de 2.18 et Calcul de l'anneau de Grothendieck $R(S_t)$

Le théorème 2.18 résulte de la

Proposition 5.1 *Soit N un entier ≥ -1.*

(i) *Si t n'est pas un entier dans l'intervalle $0 \leq n \leq 2N - 2$, la sous-catégorie* $\mathrm{Rep}(S_t)^{(N)}$ *de* $\mathrm{Rep}(S_t)$ *est abélienne semi-simple. Plus précisément, nous construirons une famille d'objets $\{\lambda\}$ de* $\mathrm{Rep}(S_t)^{(N)}$*, indexée par les partitions d'entiers $\leq N$, tels que*

  (a) $\mathrm{End}(\{\lambda\}) = k$ *et* $\mathrm{Hom}(\{\lambda\}, \{\mu\}) = 0$ *pour $\lambda \neq \mu$;*

  (b) *tout objet de* $\mathrm{Rep}(S_t)^{(N)}$ *est somme directe de copies d'objets $\{\lambda\}$.*

(ii) *Si t n'est pas un entier dans l'intervalle $0 \leq n \leq 2N - 1$, les objets $\{\lambda\}$ de* (i) *ont une dimension non nulle.*

Si on suppose (i)(a), pour que (i)(b) soit vrai, il suffit que chaque objet $[n]$ $(n \leq N)$ soit somme directe de copies d'objets $\{\lambda\}$.

L'hypothèse faite sur t implique la même hypothèse avec N remplacé par un entier plus petit, et nous construirons les $\{\lambda\}$ par récurrence sur N (récurrence limitée si t est un entier ≥ 0). Pour $N = -1$, $\mathrm{Rep}(S_t)^{(N)}$ est réduite à zéro (somme de la famille vide), et il n'y a pas de λ. A un stade $N \geq 0$, on garde les $\{\lambda\}$ construits au stade $N - 1$, et on leur ajoutera des $\{\lambda\}$ pour $|\lambda| = N$. Il faut que les $\{\lambda\}$ $(|\lambda| \leq N)$ obtenus vérifient (i)(a) et permettent la décomposition de $[N]$.

Stade N: Pour X dans $\mathrm{Rep}(S_t)^{(N)}$ et $|\lambda| \leq N - 1$, l'accouplement $\mathrm{Tr}(fg)$ met $\mathrm{Hom}(X, \{\lambda\})$ et $\mathrm{Hom}(\{\lambda\}, X)$ en dualité (4.5). Cet accouplement est $\dim(\{\lambda\})$ fois l'accouplement

$$fg\colon\ \mathrm{Hom}(X, \{\lambda\}) \times \mathrm{Hom}(\{\lambda\}, X) \to \mathrm{End}(\{\lambda\}) = k, \tag{5.1.1}$$

qui est donc non dégénéré. Appliquant 3.9(ii) à X et aux $\{\lambda\}$, on obtient une décomposition fonctorielle de X en une somme de copies de $\{\lambda\}$ ($|\lambda| \leq N-1$) et d'un reste X^*:

$$X = \oplus \operatorname{Hom}(\{\lambda\}, X) \otimes \{\lambda\} \oplus X^* \tag{5.1.2}$$

$$\operatorname{Hom}(X^*, \{\lambda\}) = \operatorname{Hom}(\{\lambda\}, X^*) = 0 \qquad \text{pour } |\lambda| \leq N-1. \tag{5.1.3}$$

Lemme 5.2 *Soit U un ensemble à N éléments. Pour φ dans le groupe symétrique S_U, soit $(\varphi)^*$ l'automorphisme de $[U]^*$ induit par l'automorphisme $(\varphi) = \{\varphi\}$ de $[U]$. Ces automorphismes forment une base de* $\operatorname{End}([U]^*)$ *et on a donc un isomorphisme d'algèbres*

$$k[S_U] \xrightarrow{\sim} \operatorname{End}([U]^*). \tag{5.2.1}$$

Preuve Les morphismes $\{\varphi\}\colon [U] \to [U]$, pour φ une bijection d'une partie U' avec une partie U'' de U, forment une base de $\operatorname{Hom}([U],[U])$ (cf (2.2.2), (2.2.3)). Il suffit donc de montrer que les morphismes $[U] \to [U]$ qui se factorisent par un objet de $\operatorname{Rep}(S_t)^{(N-1)}$ sont les combinaisons linéaires des $\{\varphi\}$ pour lesquels $U' \neq U$.

Si $U' \neq U$, $\{\varphi\}$ se factorise en effet par $[U']$, qui est dans $\operatorname{Rep}(S_t)^{(N-1)}$. Réciproquement, si $f\colon [U] \to [U]$ se factorise par un $\{\lambda\}$, donc par un $[V]$ avec $|V| \leq N-1$, les formules de composition (2.11.2) (avec $|I|$ remplacé par t, cf 2.15 (ii)) montrent que f est combinaison linéaire de $\{\varphi\}$ pour lesquels $U' \neq U$.

5.3. Stade N (fin). Prenons $U = \{1, \ldots, N\}$. L'action de $\mathbf{S}_N$ sur $[N]^*$ fournit une décomposition $\mathbf{S}_N$-équivariante (1.10.3)

$$[N]^* = \oplus [N]^*_\mu \otimes \mu \tag{5.3.1}$$

(somme sur les partitions μ de N), $\mathbf{S}_N$ agissant sur le membre de droite par son action sur les représentations μ. L'isomorphisme (5.3.1), comparé à (1.10.2), assure que $\operatorname{End}([N]^*_\mu) = k$ et que $\operatorname{Hom}([N]^*_\mu, [N]^*_\nu) = 0$ pour $\mu \neq \nu$. Ajoutant les $\{\mu\} := [N]^*_\mu$ aux $\{\lambda\}$ dont on dispose déjà, on obtient la famille promise d'objets simples.

5.4. Preuve de 5.1 (ii). Si t n'est pas un entier dans l'intervalle $0 \leq n \leq 2N-1$, pour tout objet simple $\{\lambda\}$ de $\operatorname{Rep}(S_t)^{(N)}$, 4.5 garantit que l'accouplement $\operatorname{Tr}(fg)$ de $\operatorname{End}(\{\lambda\}) = k$ avec lui-même est non dégénéré. Cet accouplement est $\dim(\{\lambda\})fg$, et 5.1 (ii) en résulte.

5.5 Notation. Sous l'hypothèse de 5.1 (i), et pour $|V| \leq N$, on notera $[V]^*$ le facteur direct de $[V]$ construit dans la preuve de 5.1, $[V]$ étant vu comme objet de $\mathrm{Rep}(S_t)^{(|V|)}$. Pour $n \leq N$, on a donc

$$[n]^* \sim \bigoplus_{|\lambda|=n} \{\lambda\} \otimes \lambda, \tag{5.5.1}$$

dans la catégorie des objets de $\mathrm{Rep}(S_t)$ munis d'une action de $\mathbf{S}_n$.

Remarque 5.6. Pour A un anneau commutatif et $t \in A$, si les $t-n$ sont inversibles pour n un entier, dans l'intervalle $0 \leq n \leq 2N-2$, et que $N!$ est inversible, la même preuve fournit un système d'objets $\{\lambda\}$ de $\mathrm{Rep}(S_t, A)$, fonctoriels en A, tels que $\mathrm{End}(\{\lambda\}) = A$, que $\mathrm{Hom}(\{\lambda\}, \{\mu\}) = 0$ pour $\lambda \neq \mu$, et que tout objet X de $\mathrm{Rep}(S_t, A)^{(N)}$ se décompose en

$$\oplus \mathrm{Hom}(\{\lambda\}, X) \otimes \{\lambda\} \xrightarrow{\sim} X \tag{5.6.1}$$

(une somme de copies des $\{\lambda\}$ si A est principal). Si en outre $t-2N+1$ est inversible, les $\dim(\{\lambda\})$ sont inversibles dans A.

Les arguments utilisés dans la preuve de 2.18 fournissent aussi le résultat suivant.

Proposition 5.7 *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie tensorielle sur k, dont les objets sont de longueur finie. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *quels que soient X et Y dans $\mathcal{A}$, $\mathrm{Tr}(fg)$ met $\mathrm{Hom}(X, Y)$ et $\mathrm{Hom}(Y, X)$ en dualité;*

(ii) *la catégorie abélienne $\mathcal{A}$ est semi-simple.*

Si k est algébriquement clos, ces conditions impliquent

(iii) *la dimension de tout objet simple est non nulle.*

Preuve L'objet 1 étant simple (Deligne and Milne 1982, 1.17), il résulte de (3.2.4) que les groupes Hom sont de dimension finie.

(i)⇒(ii). Appliquant $\mathcal{H}om(X, -)$ et prenant une image inverse, on déduit d'une extension E de X par Y une extension E' de 1 par $\mathcal{H}om(X, Y)$:

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om(X,Y) & \longrightarrow & E' & \longrightarrow & 1 & \longrightarrow & 0 \\
 & & \| & & \downarrow & & \downarrow & & \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om(X,Y) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(X,E) & \longrightarrow & \mathcal{H}om(X,X) & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

Scinder l'extension E, i.e. relever l'identité de X en un morphisme de X dans E, revient à scinder l'extension E'. Pour prouver que $\mathcal{A}$ est semi-simple, il suffit donc de prouver que toute extension de la forme $0 \to T \to Z \to 1 \to 0$ est triviale. L'accouplement $\mathrm{Tr}(fg)$ de $\mathrm{Hom}(Z, 1)$ avec $\mathrm{Hom}(1, Z)$ coïncide avec l'accouplement fg. Ce dernier est donc non dégénéré et 3.8 fournit une décomposition de Z en un multiple de 1 et un reste R tel que $\mathrm{Hom}(1, R) = \mathrm{Hom}(R, 1) = 0$. L'extension Z provient donc par push out d'une extension Z_1, avec Z_1 multiple de 1, et la simplicité de 1 montre sa trivialité.

(ii)$\Rightarrow$(i). D'après 3.4, il suffit de vérifier que pour tout objet Z, l'accouplement $v \circ u$ met $\mathrm{Hom}(Z, 1)$ et $\mathrm{Hom}(1, Z)$ en dualité. Puisque Z est semi-simple et 1 simple, on a $Z \sim 1^n \oplus R$, avec $\mathrm{Hom}(1, R) = \mathrm{Hom}(R, 1) = 0$, et on est ramené au cas trivial où $Z = 1^n$.

(i)$\Rightarrow$(iii). Si S est simple, et k algébriquement clos, le lemme de Schur (valable car $\mathrm{End}(S)$ est de dimension finie sur k) montre que $\mathrm{End}(S)$ est réduit à k. La forme bilinéaire $\mathrm{Tr}(fg)$ sur $\mathrm{End}(S)$ s'identifie à la forme bilinéaire $\dim(S) fg$ sur k. Puisqu' elle est non-dégénérée, $\dim(S) \neq 0$.

5.8 Mise en garde. Il existe des catégories pseudo-abéliennes, k-linéaires de groupes Hom de dimension finie, munies d'un produit tensoriel *ACU* tel que $\mathrm{End}(1) = k$, qui vérifient 5.7 (i) mais ne sont pas abéliennes, i.e. ne sont pas tensorielles sur k. Voici un exemple qui n'admet même aucun foncteur *ACU* dans une catégorie tensorielle.

On prend pour $\mathcal{A}$ l'enveloppe pseudo-abélienne de la catégorie k-linéaire à produit tensoriel *ACU* $\mathcal{A}_0$ librement engendrée par un objet X muni d'une autodualité symétrique et d'un endomorphisme de carré nul égal à son transposé θ, tels que $\dim(X) = 0$ et que $\mathrm{Tr}(\theta) = 1$. La catégorie $\mathcal{A}_0$ a pour objets les puissances tensorielles de X. Elle admet la description suivante:

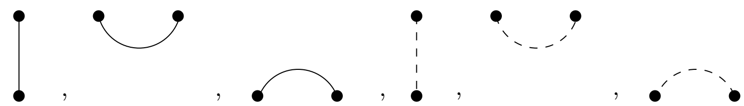
Objets: ensembles finis. On note $X^{\otimes I}$ l'ensemble fini I vu comme objet de $\mathcal{A}_0$.

Morphismes: $\mathrm{Hom}(X^{\otimes I}, X^{\otimes J})$ a une base indexée par les partitions de $I \amalg J$ en sous-ensembles à 2 éléments, chacun étant coloré “1” ou “θ”.

Produit tensoriel: somme disjointe d'ensembles finis.

Représentation graphique (d'un vecteur de base de $\mathrm{Hom}(X^{\otimes I}, X^{\otimes J})$): écrire en première ligne des points indexés par I, en deuxième ligne des points indexés par J et entre ces deux lignes joindre par un trait plein (resp. pointillé) les points dans une part colorée “1” (resp. “θ”).

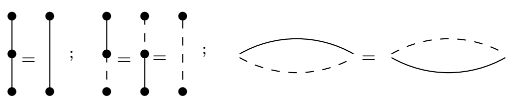
Interprétation:



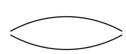
sont respectivement Id_X, l'autodualité $X \otimes X \to 1$, le morphisme $\delta\colon 1 \to X \otimes X$ correspondant, $\theta\colon X \to X$, le composé de l'autodualité avec $\theta \otimes 1$ ou $1 \otimes \theta$, et le composé de $\theta \otimes 1$ ou $1 \otimes \theta$ avec δ.

Conformément à l'interprétation donnée, pour composer deux morphismes qui appartiennent à ces bases de groupes Hom, on joint les graphes correspondants. On décrète le résultat nul si deux traits pointillés apparaissent dans une même composante connexe, ou si un cercle plein apparaît. On remplace un segment composé de traits pleins (resp. trait(s) plein(s) et un seul trait pointillé) par un trait plein (resp. pointillé), et on omet les cercles composés de trait(s) plein(s) et d'un seul trait pointillé.

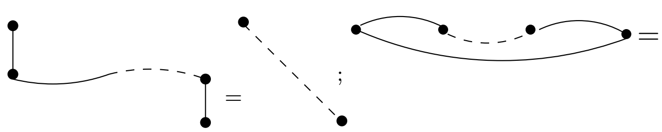
Exemples:



est l'endomorphisme 1 de 1 $= X^{\otimes\emptyset}$ (representé par une page blanche);



est l'endomorphisme $\dim X = 0$ de 1;



page blanche: $1 : 1 \to 1$.

Pour vérifier 5.7 (i), il suffit de vérifier que, pour tout n, $\mathrm{Hom}(1, X^{\otimes n})$ et $\mathrm{Hom}(X^{\otimes n}, 1)$ sont en dualité parfaite (cf 3.4). Ces groupes sont nuls pour n impair. Pour n pair, soient f et g dans les bases de ces groupes. Soit k (resp. ℓ) le nombre de traits pointillés parmi les $n/2$ traits de f (resp. g). Pour que $gf \neq 0$, il faut et il suffit que quand on joint ces graphes, les composantes connexes obtenues, des cercles, aient exactement un trait pointillé. Ceci impose $k + \ell \leq n$, et, en cas d'égalité, que le graphe de g soit déduit de celui de f en remplaçant trait plein par trait pointillé et vice versa. Le déterminant de la matrice des $gf = \mathrm{Tr}(gf)$ est $\pm$ le produit des coefficients matriciels 1 correspondant à de telles paires (f, g), et $\mathcal{A}$ vérifie donc 5.7 (i).

Dans une catégorie tensorielle, tout endomorphisme nilpotent est de trace nulle (3.6). Puisque $\theta^2 = 0$ et que $\mathrm{Tr}(\theta) = 1$, il n'existe pas de $\otimes$-foncteur ACU de $\mathcal{A}$ dans une catégorie tensorielle.

5.9. Notons X la représentation de permutation $[1]_n$ de $\mathbf{S}_n$, correspondant à l'action de $\mathbf{S}_n$ sur $\{1, \ldots, n\}$. La difficulté avec laquelle la preuve de 2.18 a dû se battre est que, outre

(A) l'action de $\mathbf{S}_k$,

on dispose sur $X^{\otimes k}$ de *deux* décompositions naturelles en sommes directes, et que les projecteurs pour l'une ne commutent pas aux projecteurs pour l'autre. Ce sont

(B) celle correspondant à la décomposition en $\mathbf{S}_n$-orbites de $\{1, \ldots, n\}^k$;
(C) la puissance tensorielle $k^{\text{ième}}$ de la décomposition de X en trivial $\oplus$ irréductible.

On a besoin de (A), (B) et (C) pour décomposer $X^{\otimes k}$ en irréductibles. En décrivant $\mathrm{Rep}_1(S_T)$ en terme des $[U]$, nous avons donné la primauté à (B). Si on s'exprime plutôt en terme des $[1]^{\otimes U}$, le théorème 2.18 est un corollaire de ce que, dans $\mathrm{Rep}(S_t)$, $\mathrm{End}([1]^{\otimes U})$ est un produit d'algèbres de matrices si t n'est pas un entier ${}_{\geq}0$. Cet énoncé a été prouvé par T. Halverson et A. Ram (2003) par une autre méthode, inspirée du traitement par H. Wenzl (1988) des groupes orthogonaux, plutôt que symétriques. De même que Wenzl utilise que la dimension des représentations du groupe orthogonal est donnée par la formule de H. Weyl, ils utilisent que la dimension de la représentation λ de $\mathbf{S}_{|\lambda|}$, vue comme fonction de λ_1, les λ_i, $i{\geq}2$ étant fixés, est un polynôme en λ_1 qui n'a pour zéros que des entiers ℓ tels que $\ell + \sum\limits_{i\geq 2} \lambda_i {}_{\geq}0$ (cf. 7.3). Notre preuve n'utilisant pas ce fait, il nous a semblé valoir la peine de la conserver, plutôt que de renvoyer à Halverson et Ram.

5.10. Fixons t non entier, et notons $R(S_t)$ l'anneau de Grothendieck de la catégorie tensorielle $\mathrm{Rep}(S_t)$. Son groupe additif est le groupe abélien libre engendré par les classes d'isomorphie d'objets simples $\{\lambda\}$ de $\mathrm{Rep}(S_t)$, et sa multiplication est induite par le produit tensoriel. Noter que $R(S_t)$ est indépendant de t: dans le cas universel où $A = \mathbb{Q}[T](((T-n)^{-1})_{n\in\mathbb{Z}})$, 5.6 montre que dans $\mathrm{Rep}(S_t, A)$ $\mathrm{Hom}(\{\lambda\} \otimes \{\mu\}, \{\nu\})$ est un A-module libre, est si $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ est son rang, les $c^{\nu}_{\lambda,\mu}$ sont les constantes de structure de $\mathrm{Rep}(S_t)$.

On notera F la filtration croissante de $\mathrm{Rep}(S_t)$ pour laquelle F_N est additivement engendré par les constituants irréductibles des $[U]$, pour $|U| \leq N$. Puisque $[U] \otimes [V]$ est somme des $[W]$ pour W recollement de U et V, et donc tel que $|W| \leq |U| + |V|$, la filtration F est compatible au produit: $F_N \cdot F_M \subset F_{N+M}$. Les $\{\lambda\}$ pour $|\lambda| \leq N$ sont un système de générateurs libre de F_N.

Pour chaque entier n, soit $R(\mathbf{S}_n)$ le groupe de Grothendieck de la catégorie des représentations de $\mathbf{S}_n$. Les foncteurs $\mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_m}^{\mathbf{S}_{n+m}}(V \otimes W)$ induisent sur la somme des $R(\mathbf{S}_n)$ un produit $*$, qui en fait un anneau commutatif d'unité la représentation 1 de $\mathbf{S}_0$. On notera encore $\{\quad\}$ le morphisme additif de $R(\mathbf{S}_n)$ dans $F_n \subset R(S_t)$ qui envoie λ sur $\{\lambda\}$.

Proposition 5.11 *Les morphismes additifs* $\{\quad\}$ *induisent un isomorphisme de l'anneau* $(\oplus R(\mathbf{S}_n), *)$ *avec l'anneau gradué* $\mathrm{Gr}^F R(S_t)$.

Preuve Le morphisme $\mathbf{S}_\ell \times \mathbf{S}_m$ équivariant

$$[\ell]^* \otimes [m]^* \to [\ell] \otimes [m] \to [\ell + m] \to [\ell + m]^*$$

donné par le recollement disjoint de $\{1, \ldots, \ell\}$ et $\{1, \ldots, m\}$ est un composé d'isomorphismes modulo objets $\{\varepsilon\}$ tels que $|\varepsilon| < \ell + m$. Si $|\lambda| = \ell$ et $|\mu| = m$, on a par (5.5.1), modulo de tels objets,

$$\begin{aligned} \{\lambda\} \otimes \{\mu\} &= \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}_\ell \times \mathbf{S}_m}(\lambda \otimes \mu, [\ell]^* \otimes [m]^*) \\ &\equiv \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}_\ell \times \mathbf{S}_m}\left(\lambda \otimes \mu, \bigoplus_{|\nu| = \ell + m} \{\nu\} \otimes \nu\right) \end{aligned}$$

et pour $|\nu| = \ell + m$, $\{\nu\}$ apparaît dans $\{\lambda\} \otimes \{\mu\}$ avec la multiplicité avec laquelle la représentation $\lambda \otimes \mu$ de $\mathbf{S}_\ell \times \mathbf{S}_m$ apparaît dans la restriction de ν à $\mathbf{S}_\ell \times \mathbf{S}_m$. Par réciprocité de Frobenius, ceci vérifie 5.11.

Corollaire 5.12 *L'anneau* $R(S_t)$ *est l'algèbre de polynômes*

$$\mathbb{Z}[T_1, T_2, \ldots, T_n, \ldots]$$

engendrée par les $T_i := \{$*partition grossière de* $i\}$.

Cela résulte de 5.11 et du même énoncé pour $(\oplus R(\mathbf{S}_n), *)$. Les partitions $(1, \ldots, 1, 0, \ldots)$ fournissent un autre système de générateurs libre.

6 Spécialisation à t Entier $_{\geq}0$

6.1. Soit $\mathcal{A}$ une catégorie k-linéaire à produit tensoriel ACU rigide, telle que $\mathrm{End}(1) = k$. Disons qu'un morphisme $f\colon X \to Y$ est *négligeable* si pour tout morphisme $u\colon Y \to X$, on a $\mathrm{Tr}(fu) = 0$. Puisque $(fg)u = f(gu)$, un composé fg est négligeable dès que f, ou dualement g, est négligeable. Un produit tensoriel $f \otimes g$ est négligeable dès que f, ou par symétrie g, est négligeable. En effet, étant donnés $f\colon X' \to Y'$, $g\colon X'' \to Y''$ et $u\colon Y' \otimes Y'' \to X' \otimes X''$, si on regarde g comme donné par un morphisme $1 \to X''^{\vee} \otimes Y''$ et u par un morphisme $1 \to Y'^{\vee} \otimes Y''^{\vee} \otimes X' \otimes X''$, on déduit de u et g par les contractions $X''^{\vee} \otimes X'' \to 1$ et $Y''^{\vee} \otimes Y'' \to 1$ un morphisme $\bar{u} : Y' \to X'$ tel que $\mathrm{Tr}((f \otimes g) \circ u) = \mathrm{Tr}(f\bar{u})$. La catégorie $\mathcal{A}/(\text{négligeable})$ quotient de $\mathcal{A}$ par l'idéal des morphismes négligeables hérite donc de $\mathcal{A}$ d'un produit tensoriel. Il est encore ACU rigide, avec $\mathrm{End}(1) = k$. Si $\mathcal{A}$ est pseudo-abélienne et que les $\mathrm{Hom}(X, Y)$ sont de dimension finie, $\mathcal{A}/(\text{négligeable})$ est encore pseudo-abélienne, car si $\overline{E}$ est quotient d'une algèbre de dimension finie E, tout idempotent e de $\overline{E}$ se relève en un idempotent de E (appliquer à un quelconque relèvement $\tilde{e}$ de e un polynôme valant 0 en 0, 1 en 1 et valant 0 ou 1 sur le spectre de $\tilde{e}$, compté avec multiplicités).

Théorème 6.2 *Si $t \in k$ est un entier $n_{\geq}0$, le foncteur*

$$[U] \to [U]_n\colon\ \mathrm{Rep}(S_t, k) \to \mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n) \tag{6.2.1}$$

de $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ *dans la catégorie des représentations du groupe symétrique* $\mathbf{S}_n$ *induit une équivalence du quotient de* $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ *par l'idéal des morphismes négligeables avec* $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$.

Preuve Comme tout $\otimes$-foncteur, le foncteur $[U] \mapsto [U]_n$ préserve les traces. Un morphisme dont l'image est négligeable est donc négligeable.

La catégorie $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$ étant absolument semi-simple, les seuls morphismes négligeables de $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$ sont les morphismes nuls. Quelques soient X et Y dans $\mathrm{Rep}(S_t, k)$, le morphisme

$$\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(X_n, Y_n) \tag{6.2.2}$$

est surjectif: par passage à un facteur direct, on se ramène au cas où X et Y sont de la forme $[U]$, traité en 2.9(i). L'image par (6.2.1) d'un morphisme négligeable est donc négligeable – donc nulle – et le foncteur (6.2.1) se factorise par un foncteur pleinement fidèle de $\mathrm{Rep}(S_t, k)/(\text{négligeable})$ dans $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$. Son image essentielle contient la représentation de permutation image de [1], qui est fidèle. Etant stable par produit tensoriel, dual, somme directe et sous-quotient, elle contient toutes les représentations de $\mathbf{S}_n$.

6.3. Fixons un entier $N \geq 0$ et supposons que t est un entier $n \geq 2N$. Pour $|\lambda| \leq N$, l'objet simple $\{\lambda\}$ de $\mathrm{Rep}(S_t, k)^{(N)}$ est de dimension non nulle (5.1 (ii)), donc a une image non nulle dans $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$. Par la surjectivité de (6.2.2) et la semi-simplicité de $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$, les images dans $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$ des objets simples $\{\lambda\}$ ($|\lambda| \leq N$) de $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ sont des représentations irréductibles deux à deux non isomorphes de $\mathbf{S}_n$. Nous nous proposons de les déterminer.

Pour $\ell \leq N$, et $[\ell]^*$ comme en 5.5, par la surjectivité de (6.2.2), l'image $[\ell]^*_n$ de $[\ell]^*$ est le sous-objet de $[\ell]_n$ somme des sous-représentations irréductibles qui n'apparaissent pas dans un $[\ell']_n$ avec $\ell' < \ell$. Il s'agit de calculer $[\ell]^*_n$ comme représentation de $\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell$, et de comparer à 5.5.1.

Notation: Pour $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_a)$ une partition et m un entier $\geq |\lambda| + \lambda_1$, $\{\lambda\}_m$ est la partition suivante de m:

$$\{\lambda\}_m := (m - |\lambda|, \lambda_1, \ldots, \lambda_a). \tag{6.3.1}$$

Proposition 6.4 *Si $t = n > 2|\lambda|$, l'image de l'objet simple $\{\lambda\}$ de* $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ *dans* $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$ *est la représentation irréductible de* $\mathbf{S}_n$ *correspondant à la partition $\{\lambda\}_n$ de n.*

Preuve Si $\ell \leq n$, l'ensemble des injections de $\{1, \ldots, \ell\}$ dans $\{1, \ldots, n\}$ est un ensemble homogène sous $\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell$. Le stabilisateur d'un élément est le sous-groupe

$$\mathbf{S}_{n-\ell} \times \mathbf{S}_\ell \subset \mathbf{S}_{n-\ell} \times \mathbf{S}_\ell \times \mathbf{S}_\ell \subset \mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell$$

(la première inclusion est déduite de l'inclusion diagonale de $\mathbf{S}_\ell$ dans $\mathbf{S}_\ell \times \mathbf{S}_\ell$). Comme représentation de $\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell$, $[\ell]_n$ est donc la représentation induite $\mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_{n-\ell} \times \mathbf{S}_\ell}^{\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell}(1)$. Induisons par étapes, en passant par $\mathbf{S}_{n-\ell} \times \mathbf{S}_\ell \times \mathbf{S}_\ell$. Pour l'inclusion diagonale de $\mathbf{S}_\ell$ dans $\mathbf{S}_\ell \times \mathbf{S}_\ell$, on a

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_\ell}^{\mathbf{S}_\ell \times \mathbf{S}_\ell}(1) = \sum \lambda \otimes \lambda,$$

où λ parcourt les partitions de ℓ, identifiées aux représentations irréductibles de $\mathbf{S}_\ell$. Chaque représentation de $\mathbf{S}_\ell$ est en effet autoduale. On a donc

$$[\ell]_n = \sum \mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_{n-\ell} \times \mathbf{S}_\ell}^{\mathbf{S}_n}(1 \otimes \lambda) \otimes \lambda. \tag{6.4.1}$$

D'après la règle de Littlewood-Richardson, $\mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_{n-\ell} \otimes \mathbf{S}_\ell}^{\mathbf{S}_n}(1 \otimes \lambda)$ est la somme des représentations μ, pour μ une partition de n, identifiée à son diagramme, telle que $\lambda \subset \mu$ et que $\mu - \lambda$ n'ait pas deux cases sur la même colonne. En d'autres termes:

$$\lambda_1 \leq \mu_1 \quad \text{et} \quad \lambda_i \leq \mu_i \leq \lambda_{i-1} \quad \text{pour} \quad i \geq 2.$$

Si $|\lambda| + \lambda_1 \leq n$, a fortiori si $2\ell \leq n$, l'une de ces partitions μ est $\{\lambda\}_n$ (le cas où $\mu_i = \lambda_{i-1}$ pour $i \geq 2$). Les autres ont $\mu_1 > n - \ell$ et elles sont de la forme $\{\lambda'\}_n$ avec $|\lambda'| = n - \mu_1 < \ell$, donc figurent dans $[\ell']_n$ avec $\ell' = |\lambda'| < \ell$. Dès lors

$$[\ell]_n^* = \sum \{\lambda\}_n \otimes \lambda, \tag{6.4.2}$$

la somme étant étendue aux partitions λ de ℓ, et 6.4 s'en déduit par comparaison avec 5.5.1.

7 Spécialisation à t Entier Petit Relativement à λ

Les phénomènes décrits dans cette section ont un analogue pour les séries GL et O. Nous espérons que les résultats partiels obtenus ici pour la série $\mathbf{S}_n$ aideront à comprendre ces analogues plus difficiles.

7.1. Soit μ une partition d'un entier m. Rappelons la formule donnée par Frobenius (1900) §3 (6) pour la dimension de la représentation correspondante de $\mathbf{S}_n$. On choisit ℓ tel que $\mu_i = 0$ pour $i > \ell$, et on transforme la suite $\mu_1 \geq \ldots \geq \mu_\ell$ en une suite strictement décroissante $\alpha_1 > \ldots > \alpha_\ell$ en ajoutant $\ell - i$ à μ_i. On a alors

$$\dim \mu = m! \prod_{i>j} (\alpha_i - \alpha_j) / \prod \alpha_i!. \tag{7.1.1}$$

Si le choix de ℓ importe, on écrira $\alpha[\ell]$ plutôt que α. Quand ℓ est remplacé par $\ell + 1$, on a $\alpha[\ell + 1]_i = \alpha[\ell]_i + 1$ pour $i \leq \ell$, et $\alpha[\ell + 1]_{\ell+1} = 0$. Au numérateur de (7.1.1), de nouveaux facteurs $\alpha[\ell+1]_i - \alpha[\ell+1]_{\ell+1} = \alpha[\ell]_i + 1$ apparaissent, tandis qu'au dénominateur $\alpha[\ell]_i!$ est replacé par $\alpha[\ell + 1]_i! = (\alpha[\ell]_i + 1)\alpha[\ell]_i!$.

Si on écrit chaque factorielle $a!$ comme étant le produit des entiers de 1 à a, le second membre de (7.1.1) apparaît comme étant le produit d'un multiensemble d'entiers (un ensemble d'entiers, avec multiplicités positives ou négatives). La vérification donnée de l'indépendance de ℓ montre que ce multiensemble est indépendant de ℓ.

Les longueurs des crochets (hook length) de μ sont les entiers $c_{a,b} := (\mu_a - a) + (\mu_b^* - b) + 1$ pour (a, b) dans le diagramme de μ, i.e. pour $a, b \geq 1$ et $b \leq \mu_a$ (équivalent à $a \leq \mu_b^*$). Par un argument sur lequel la preuve de 7.3 ci-dessous est calquée, Frame, de B. Robinson et Thrall (1954) (lemme 1) vérifient que pour chaque $i \leq \ell$, les longueurs de crochets c_{ib} sont les entiers entre 1 et α_i distincts des $\alpha_i - \alpha_j$ $(i < j \leq \ell)$, de sorte que (7.1.1) peut se récrire

$$\dim \mu = m!/\prod \text{(longueurs des crochets)}, \tag{7.1.2}$$

l'égalité entre les second membres de (7.1.1) et (7.1.2) provenant d'une égalité entre multiensembles d'entiers correspondants.

7.2. Soit λ une partition. Si $n{\geq}|\lambda|+\lambda_1$, la partition $\{\lambda\}_n$ de n est définie. Si on prend $\ell = |\lambda|+1$, la suite strictement décroissante α correspondant à $\{\lambda\}_n$ commence par $\alpha_1 = (n-|\lambda|)+\ell-1 = n$, après quoi $\alpha_{i+1} = \lambda_i+|\lambda|-i$ pour $1 \leq i \leq |\lambda|$. On a donc

$$\dim\{\lambda\}_n =$$

$$\prod(n-(\lambda_i+|\lambda|-i))\cdot\prod_{i>j}((\lambda_i+|\lambda|-i)-(\lambda_j+|\lambda|-j))/\prod(\lambda_i+|\lambda|-i)! \tag{7.2.1}$$

Dans ces produits, $1 \leq i, j \leq |\lambda|$. Les deuxième et troisième produits coïncident avec ceux qui apparaissent dans (7.1.1) pour $\dim(\lambda)$ calculé avec $\ell = |\lambda|$, de sorte que

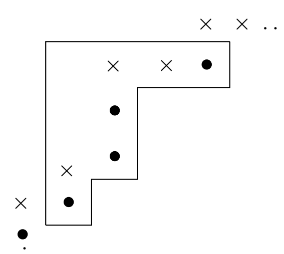
$$\dim\{\lambda\}_n = \frac{\dim(\lambda)}{|\lambda|!}\, P_\lambda(n), \tag{7.2.2}$$

pour $P_\lambda(T)$ un polynôme de degré $|\lambda|$ produit de facteurs distincts de la forme $T-i$, i entier.

Lemme 7.3 *L'ensemble des zéros du polynôme P_λ admet les descriptions équivalentes suivantes:*

(i) *les entiers $|\lambda|+\lambda_a-a$, pour $1 \leq a \leq |\lambda|$.*
(ii) *les entiers $i{\geq}0$ distincts des entiers $|\lambda|+b-\lambda_b^*-1$ pour $b{\geq}1$.*

Preuve La formule (7.2.1) donne la description (i). Montrons son équivalence avec (ii). Une partition λ décompose l'ensemble des entiers en ceux de la forme $b-\lambda_b^*-1$ et ceux de la forme λ_a-a. En effet, si on longe comme suit le bord SE du diagramme de λ et les axes



les $\bullet$ (resp. $\times$) sont en les positions (x,y) de la forme (a,λ_a) (resp. $(\lambda_b^*, b-1)$), et $y-x$ parcourt $\mathbb{Z}$. Pour $b\geq\lambda_1+1$, les $b-\lambda_b^*-1$ sont les entiers $\geq\lambda_1$. Pour $a\geq|\lambda|+1$, les λ_a-a sont les entiers $<-|\lambda|$. Translatant par $|\lambda|$, on en déduit comme promis que les entiers i de la forme $|\lambda|+\lambda_a-a$ pour $1\leq i\leq|\lambda|$ sont les entiers $i\geq 0$ qui ne sont pas de la forme $|\lambda|+b-\lambda_b^*-1$ et qu'ils sont tous $\leq|\lambda|+\lambda_1$.

7.4. Si t dans A de caractéristique 0 est tel que les $t-i$ soient inversibles pour i entier dans l'intervalle $0\leq i<2|\lambda|-1$, $\{\lambda\}$ est défini dans $\mathrm{Rep}(S_t,A)$ et on a encore

$$\dim\{\lambda\} = \frac{\dim(\lambda)}{|\lambda|!}P_\lambda(t). \tag{7.4.1}$$

Il suffit de le vérifier dans le cas universel où

$$A = \mathbb{Q}[T]\Big(\big(\prod_{0\leq i<2|\lambda|-1}(T-i)\big)^{-1}\Big)$$

et $t=T$, et, d'après (7.2.2) et 6.4, (7.4.1) devient en effet vrai après une infinité de spécialisations de T en un entier.

7.5. Même si l'entier $n\geq 0$ n'est plus $\geq|\lambda|+\lambda_1$, continuons d'appeler $\{\lambda\}_n$ la suite $(n-|\lambda|,\lambda_1,\lambda_2,\ldots)$, et α la suite des $(\{\lambda\}_n)_i+|\lambda|+1-i$. C'est la suite $(n,\lambda_1+|\lambda|-1,\lambda_2+|\lambda|-2,\ldots)$, et les zéros du polynôme P_λ sont les entiers $n\geq 0$ pour lesquels deux termes de cette suite sont égaux. Si l'entier $n\geq 0$ n'est pas un zéro, on peut réordonner la suite α pour obtenir une suite strictement décroissante α^+, et celle-ci correspond comme en 7.1 (toujours pour $\ell=|\lambda|+1$) à une partition $\{\lambda\}_n^+$. L'expression (7.1.1) pour α coïncide avec (7.2.1) et (7.2.2). Si $n<|\lambda|+\lambda_1$ et que $\alpha_{i+1}>\alpha_1>\alpha_{i+2}$, on déduit α^+ de α en insérant α_1 entre α_{i+1} et α_{i+2}, et (7.1.1) pour α^+ coïncide avec (7.1.1) pour α sauf que les $\alpha_1-\alpha_j$ sont changés de signe pour $2\leq j\leq i+1$. On a donc

$$\dim\{\lambda\}_n^+ = (-1)^i\,\frac{\dim(\lambda)}{n!}\,P_\lambda(n). \tag{7.5.1}$$

Si $n\geq|\lambda|+\lambda_1$, $\{\lambda\}_n^+$ coïncide avec $\{\lambda\}_n$ et la même formule vaut avec $i=0$. On notera que (7.5.1) reflète une égalité de multiensemble d'entiers, à i changements de signe près.

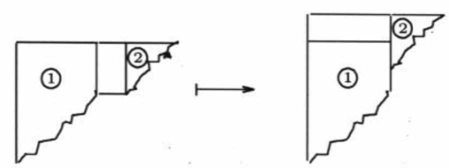
Que $\alpha_{i+1}>\alpha_1>\alpha_{i+2}$ se récrit $\lambda_i+|\lambda|-i>n>\lambda_{i+1}+|\lambda|-(i+1)$. Cette conditiion équivaut à $\lambda_i\geq n-|\lambda|+i+1>\lambda_{i+1}$, puis à ce que pour un b on ait $b=n-|\lambda|+i+1$ et $\lambda_b^*=i$, et enfin à ce que pour un b on ait

$$n=|\lambda|+b-\lambda_b^*-1 \qquad \text{et} \qquad \lambda_b^*=i.$$

Ceci reprouve 7.3 et montre que si $n \geq 0$ n'est pas un zéro de P_λ, i.e. est de la forme $|\lambda| + b - \lambda_b^* - 1$, on a

$$\dim \{\lambda\}_n^+ = (-1)^{\lambda_b^*} \frac{\dim(\lambda)}{n!} P_\lambda(n). \tag{7.5.2}$$

On laisse au lecteur le soin de vérifier que si $n = |\lambda| + b - \lambda_b^* - 1$, le diagramme de la partition $\{\lambda\}_n^+$ est déduit de celui de λ par la construction suivante, où la colonne marquée est la b-ième:



Inspirés par (7.5.2), nous définirons pour tout entier $n \geq 0$ la représentation virtuelle $\{\lambda\}_n$ de $\mathbf{S}_n$ comme étant celle qui correspond à la partition $\{\lambda\}_n$ de n quand celle-ci est définie, i.e. quand $n \geq |\lambda| + \lambda_1$, comme étant 0 si n n'est pas de la forme $|\lambda| + b - \lambda_b^* - 1$ et comme étant $(-1)^{\lambda_b^*}\{\lambda\}_n^+$ si n est de cette forme. Que cette convention est raisonnable sera confirmé par 7.11. La construction qui suit en donne une autre interprétation. Elle m'a été expliquée par A. Ram.

7.6. Une partition λ peut être vue comme un poids dominant de $GL(N)$ dès que N est assez grand pour que $\lambda_{N+1} = 0$ (1.10 (B)). Une suite d'entiers λ_a seulement supposés nuls pour a assez grand définit de même un poids non nécessairement dominant.

Un poids dominant λ définit une représentation irréductible $V(\lambda)$. Un poids quelconque définit une représentation virtuelle encore notée $V(\lambda)$ de $GL(N)$, de caractère donné par la formule des caractères de Weyl, et donc fonction antisymétrique de $\lambda + \rho$, pour l'action du groupe de Weyl $\mathbf{S}_N$. On peut remplacer ρ par une quelconque suite $(\ell - 1, \ell - 2, \cdots, \ell - N)$, car la différence avec ρ est fixe sous $\mathbf{S}_N$.

Pour λ une partition, les représentations λ de $\mathbf{S}_{|\lambda|}$ et $V(\lambda)$ de $GL(N)$ se correspondent:

$$V(\lambda) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbf{S}_{|\lambda|}}(\lambda, V^{\otimes|\lambda|}), \quad \text{et} \tag{7.6.1}$$

$$\lambda \simeq \mathrm{Hom}_{GL(N)}(V(\lambda), V^{\otimes|\lambda|}). \tag{7.6.3}$$

Si λ est une suite d'entiers λ_a $(a \geq 1)$ nuls pour a assez grand, et telle que $|\lambda| := \Sigma\lambda_a \geq 0$ on attachera à λ la représentation virtuelle $R(\lambda)$ de $\mathbf{S}_{|\lambda|}$ second membre de (7.5.3) pour N assez grand. Explicitons. Si la suite des $\lambda_a - a$ n'est pas formée d'entiers tous distincts, les représentations virtuelles $V(\lambda)$ et $R(\lambda)$ sont nulles. S'ils sont tous distincts, il existe une permutation w des entiers, avec $w(a) = a$ pour a grand, qui transforme la suite des $\lambda_a - a$ en une suite strictement décroissante. Notons $\varepsilon(\lambda)$ la signature de w. La suite décroissante λ^+ qui correspond au poids dominant $w(\lambda+\rho)-\rho$ est la suite

$$\lambda_a^+ = \lambda_{w^{-1}(a)} - w^{-1}(a) + a, \tag{7.6.4}$$

et la représentation virtuelle $R(\lambda)$ de $\mathbf{S}_{|\lambda|}$ est

$$R(\lambda) = \varepsilon(\lambda)\lambda^+. \tag{7.6.5}$$

Le cas qui nous intéresse est celui où, partant d'une partition λ et de $n\geq 0$, on considère la suite d'entiers $\{\lambda\}_n := (n-|\lambda|, \lambda_1, \lambda_2, \dots)$. Comparant 7.5 et 7.6, on voit que la notation $\{\lambda\}_n^+$ de 7.5 est une cas particulier de 7.6.4, et que la représentation virtuelle $\{\lambda\}_n$ de 7.5 est $R(\{\lambda\}_n)$.

Nous avons vu en (6.4.1) que la représentation $[\ell]_n$ de $\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell$ est isomorphe à la somme sur les partitions λ de ℓ des $\mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_{n-\ell}\times\mathbf{S}_\ell}^{\mathbf{S}_n}(1\otimes\lambda)\otimes\lambda$. Nous allons en déduire que dans $R(\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell)$ on a

Proposition 7.7 $[\ell]_n = \sum\limits_{|\mu|=m\,\leq\,\ell} \{\mu\}_n \otimes \mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_m\times\mathbf{S}_{\ell-m}}^{\mathbf{S}_\ell}(\mu\otimes 1).$

Preuve Appliquons la règle de Littlewood-Richardson pour calculer l'induite de $\lambda\otimes 1$ de $\mathbf{S}_\ell \times \mathbf{S}_{n-\ell}$ à $\mathbf{S}_n$, égale à l'induite de $1\otimes\lambda$ de $\mathbf{S}_{n-\ell}\times\mathbf{S}_\ell$ à $\mathbf{S}_n$. On obtient que

$$[\ell]_n = \sum \nu\otimes\lambda,$$

la somme portant sur les partitions λ de ℓ et les partitions ν de n telles que

$$\lambda_i \leq \nu_i \leq \lambda_{i-1} \quad \text{pour} \quad i\geq 2 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \leq \nu_1.$$

Si μ est la partition $(\nu_2, \dots)$ telle que $\nu = \{\mu\}_n$, ces conditions se récrivent

$$\mu_i \leq \lambda_i \leq \mu_{i-1} \quad \text{pour} \quad i\geq 2,\ \mu_1 \leq \lambda_1 \quad \text{et} \quad \lambda_1 \leq n - |\mu|:$$

on a $[\ell]_n = \sum\{\mu\}_n\otimes\lambda$ pour (λ,μ) comme ci-dessus. Si on applique la règle de Littlewood-Richardson à l'induite au second membre de 7.7, on obtient la même somme, sans la restriction $\lambda_1 \leq n-|\mu|$.

Il reste à prouver que pour chaque partition λ de ℓ, on a $\Sigma\{\mu\}_n = 0$ lorsqu'on fait porter la somme sur les partitions μ avec $|\mu|\leq\ell$ telles que

$$\lambda_{i+1} \leq \mu_i \leq \lambda_i \quad \text{pour} \quad i\geq 1 \quad \text{et} \quad n-|\mu| < \lambda_1.$$

Considérons, plutôt que μ, la suite β, indexée cette fois par les entiers ≥ 0: $(n-|\mu|, \mu_1-1, \mu_2-2, \dots)$. Les suites μ et β se déterminent mutuellement, et écrites en terme de β et des $\alpha_i := \lambda_i - i$, les conditions sur β deviennent les suivantes:

a. $\beta_i = -i$ pour i assez grand;
b. $\Sigma(\beta_i + i) = n$;
c. $\alpha_{i+1} < \beta_i \leq \alpha_i$ si $i \geq 1$;
d. $\beta_0 \leq \alpha_1$.

Puisque $\beta_0 \leq \alpha_1$, il existe a tel que $\alpha_{a+1} < \beta_0 \leq \alpha_a$. Soit β' déduit de β en échangeant β_0 et β_a. Cette construction est involutive. Les μ et μ' correspondant vérifient $\{\mu\}_n = -\{\mu'\}_n$, et que $\Sigma\{\mu\}_n = 0$ en résulte.

Notons $[\ell]^*$ la représentation virtuelle

$$[\ell]^* := \sum_{|\lambda|=\ell} \{\lambda\}_n \otimes \lambda$$

de $\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell$. Avec cette notation, 7.7 se récrit

$$[\ell] = \sum_{m \leq \ell} \mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_m \times \mathbf{S}_{\ell-m}}^{\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell}([m]^* \otimes 1). \tag{7.7.1}$$

Corollaire 7.8 *Dans $R(\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell)$, on a*

$$[\ell]^* = \sum_{m \leq \ell} (-1)^{\ell-m} \mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_m \times \mathbf{S}_{\ell-m}}^{\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell}([m] \otimes \varepsilon). \tag{7.8.1}$$

C'est une conséquence de (7.7.1) et du lemme suivant, pour $\Lambda = R(\mathbf{S}_n)$ (de sorte que $\Lambda \otimes R(\mathbf{S}_m) = R(\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_m)$.

Lemme 7.9 *Soit Λ un groupe abélien libre. Soient, pour $m \leq \ell$, $f(m)$ et $g(m)$ des éléments de $\Lambda \otimes R(\mathbf{S}_m)$. Les identités suivantes sont équivalentes:*

$$\text{Pour } m \leq \ell,\ f(m) = \sum_{m' \leq m} \mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_{m'} \times \mathbf{S}_{m-m'}}^{\mathbf{S}_m}(g(m') \otimes 1), \tag{7.9.1}$$

$$\text{Pour } m \leq \ell,\ g(m) = \sum_{m' \leq m} (-1)^{m-m'} \mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_{m'} \times \mathbf{S}_{m-m'}}^{\mathbf{S}_m}(f(m') \otimes \varepsilon). \tag{7.9.2}$$

Il suffit de traiter le cas $\Lambda = \mathbb{Z}$.

Preuve pour $\Lambda = \mathbb{Z}$. On montrera que la composée $g \to f \to g$ (resp. $f \to g \to f$) des transformations données par (7.9.1) et (7.9.2) est l'identité. Nous ne considèrerons que $g \to f \to g$. Le cas $f \to g \to f$ se traite de même et est laissé au lecteur.

L'image de g par $g \to f \to g$ est

$$\sum_{m'' \leq m' \leq m} (-1)^{m-m'} \operatorname{Ind}_{\mathbf{S}_{m'} \times \mathbf{S}_{m-m'}}^{\mathbf{S}_m} \left(\operatorname{Ind}_{\mathbf{S}_{m''} \times \mathbf{S}_{m'-m''}}^{\mathbf{S}_{m'}} (g(m'') \otimes 1) \otimes \varepsilon \right) =$$
$$\sum_{m'' \leq m' \leq m} (-1)^{m-m'} \operatorname{Ind}_{\mathbf{S}_{m''} \times \mathbf{S}_{m'-m''} \times \mathbf{S}_{m-m'}}^{\mathbf{S}_m} (g(m'') \otimes 1 \otimes \varepsilon) =$$
$$\sum_{m'' \leq m} \operatorname{Ind}_{\mathbf{S}_{m''} \times \mathbf{S}_{m-m''}}^{\mathbf{S}_m} \Big(g(m'') \otimes \sum_{m'' \leq m' \leq m} (-1)^{m-m'} \operatorname{Ind}_{\mathbf{S}_{m'-m''} \times \mathbf{S}_{m-m'}}^{\mathbf{S}_{m-m''}} (1 \otimes \varepsilon) \Big)$$

Le terme pour $m'' = m$ redonne g, et les autres sont nuls:

Lemme 7.10 *Pour $\ell > 0$, on a dans $R(\mathbf{S}_\ell)$*

$$\sum_{\ell' + \ell'' = \ell} (-1)^{\ell''} \operatorname{Ind}_{\mathbf{S}_{\ell'} \times \mathbf{S}_{\ell''}}^{\mathbf{S}_\ell} (1 \otimes \varepsilon) = 0.$$

Preuve Rappelons que le produit tensoriel d'une famille finie de complexes L_a ($a \in A$) est défini indépendamment du choix d'un ordre total sur A. Un ordre total définit un isomorphisme de la somme $| \otimes L_a|$ des composantes du produit tensoriel avec $\otimes |L_a|$, cet isomorphisme étant modifié par des signes quand l'ordre change. Si on pose $\operatorname{or}(B) := \overset{|B|}{\wedge} \mathbb{Z}^B$ et, pour $\mathbf{n} \in \mathbb{Z}^A$, $B(\mathbf{n}) := \{a \in A \mid n_a \text{ est impair}\}$, on a canoniquement

$$| \otimes L_a| = \sum \left(\otimes L_a^{n(a)} \right) \otimes \operatorname{or}(B(\mathbf{n})).$$

Soient $A = \{1, \ldots, \ell\}$, et K le complexe $k \xrightarrow{\sim} k$ réduit aux degrés 0 et 1. Il est acyclique. Si A est non vide, le complexe $K^{\otimes A}$ est acyclique. Il est muni d'une action de $\mathbf{S}_\ell$ et, pour $\ell = \ell' + \ell''$, sa composante de degré ℓ'' est canoniquement isomorphe à $\operatorname{Ind}_{\mathbf{S}_{\ell'} \times \mathbf{S}_{\ell''}}^{\mathbf{S}_\ell} (1 \otimes \varepsilon)$. Exprimant que la caractéristique d'Euler-Poincaré est nulle dans $R(\mathbf{S}_\ell)$, on obtient 7.10.

Soient n_0 un entier ≥ 0, c une classe de conjugaison dans $\mathbf{S}_{n_0}$ et, pour $n \geq n_0$, notons encore c la classe de conjugaison de $\mathbf{S}_n$ qui en est l'image par l'inclusion naturelle de $\mathbf{S}_{n_0}$ dans $\mathbf{S}_n$.

Corollaire 7.11 *Soient ℓ un entier, et λ une partition de ℓ. La valeur en c du caractère de la représentation virtuelle $\{\lambda\}_n$ de $\mathbf{S}_n$, définie pour $n \geq n_0$, est polynômiale en n.*

Preuve Si $\chi_{\ell*}$ est le caractère de la représentation virtuelle $[\ell]^*$ de $\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell$, et χ_λ celui de la représentation λ de $\mathbf{S}_\ell$, la valeur en c du caractère de $\{\lambda\}_n$ est

$$\frac{1}{\ell!} \sum_\sigma \chi_{\ell*}(c,\sigma)\chi_\lambda(\sigma).$$

Par 7.8, il suffit donc de prouver pour tout σ dans $\mathbf{S}_\ell$, et tout $m \leq \ell$, la valeur en (c,σ) du caractère de

$$\mathrm{Ind}_{\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_m \times \mathbf{S}_{\ell-m}}^{\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell}([m] \otimes \varepsilon)$$

est polynômiale en n. L'induction de H à G d'un caractère de H est une somme indexée par G/H de son image sur les conjugués de H. Il suffit dans notre cas de traiter chaque terme séparément, et ceci nous ramène à vérifier que pour σ' dans $\mathbf{S}_m$, la valeur en (c,σ') du caractère de la représentation $[m]$ de $\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_m$ est polynômiale en n. Cette valeur est le nombre d'injections de $\{1,\ldots,m\}$ dans $\{1,\ldots,n\}$ telles que $cf = f\sigma'$. Si U (resp. Y) est la partie de $\{1,\ldots,m\}$ (resp. $\{1,\ldots,n\}$) non fixe par σ' (resp. c), c'est le produit du nombre d'injection f_1 de U dans Y telles que $cf_1 = f_1\sigma'$, par le nombre d'injection de $\{1,\ldots,m\} - U$ dans $\{1,\ldots,n\} - Y$. Le premier est indépendant de n, le second polynômial en n.

Mise en garde: le polynôme de valeur en $n_{\geq} n_0$ le caractère de $\{\lambda\}_n$ en c n'est pas nécessairement nul en les entiers $n \leq n_0$ tels que la représentation virtuelle $\{\lambda\}_n$ soit nulle.

7.12. Soit U un ensemble fini. Nous nous proposons de lui associer un complexe multiple $K(U)'$ dans $\mathrm{Rep}(S_t,k)$ à multidegrés dans $\mathbb{Z}^U$, dont seules les composantes de multidegré dans $\{0,1\}^U$ sont non nulles. "Complexe multiple" est ici pris au sens que les différentielles d_u $(u \in U)$ commutent.

Un multidegré dans $\{0,1\}^U$ est la fonction caractéristique d'une partie P de U. La composante correspondante est $[U-P]$, et si $u \notin P$,

$$d_u \colon [U-P] \to [U-P-\{u\}]$$

est res_j, pour j l'inclusion de $U-P-\{u\}$ dans $U-P$.

Un complexe multiple K à multidegrés dans $\mathbb{Z}^U$ définit un complexe simple associé $\mathbf{s}K$. Un ordre total sur U fournit un isomorphisme $|\mathbf{s}K| \sim |K|$ entre les espaces sous-jacents, mais cet isomorphisme est modifié par des signes quand l'ordre change. Avec les notations de 7.10, on a canoniquement

$$|\mathbf{s}K| \sim \sum K^{\mathbf{n}} \otimes \mathrm{or}(B(\mathbf{n})).$$

Si $K(U)$ est $\mathbf{s}K(U)'$, on a donc

$$|\mathbf{s}K| \sim \sum [U-P] \otimes \mathrm{or}(P).$$

Le groupe symétrique S_U agit sur $K(U)$. Utilisons cette action pour décomposer $K(U)$ (cf. 1.10.3):

$$K(U) = \bigoplus_{|\lambda|=\ell} K(U)_\lambda \otimes \lambda.$$

Si t est un entier $n_{\geq}0$, l'image de $K(U)$ dans $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$ est munie d'une action de S_U: c'est un complexe de $\mathbf{S}_n \times S_U$-modules. Pour $U = \{1, \dots, \ell\}$, sa caractéristique d'Euler-Poincaré est donnée par (7.8.1):

$$\chi(\text{image de } K(U)) = [\ell]^* \quad \text{dans } R(\mathbf{S}_n \times \mathbf{S}_\ell), \tag{7.12.1}$$

d'où résulte que

$$\chi(\text{image de } K(U)_\lambda) = \{\lambda\}_n \quad \text{dans } R(\mathbf{S}_n). \tag{7.12.2}$$

7.13. Questions

(i) Si t n'est pas un entier $_{\geq}0$, le complexe $K(U)$ n'a-t-il de cohomologie qu'en degré 0?

(ii) Si t est un entier n, l'image de $K(U)_\lambda$ dans $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$ est-elle acyclique si $\{\lambda\}_n = 0$? Si $n = |\lambda| + b - \lambda_b^* - 1$ ($b_{\geq}1$), est-elle acyclique sauf en degré $a := \lambda_b^*$, avec $H^a = \{\lambda\}_n^+$?

J'ai seulement pu vérifier que si $n_{\geq}2\ell$, l'image de $K(U)$ et donc des $K(U)_\lambda$ n'a de cohomologie qu'en degré 0.

8 La Propriété Universelle de $\mathrm{Rep}(S_t, A)$

8.1. Soit $\mathcal{T}$ une catégorie à produit tensoriel ACU. Si l'objet T de $\mathcal{T}$ admet un dual, la construction habituelle associe à une structure d'algèbre $\mu\colon T\otimes T \to T$ un morphisme trace $\mathrm{Tr}\colon T \to 1$. Le Hom interne $\mathcal{H}om(T,T)$ est en effet défini (3.2), et Tr est le composé de la "multiplication à gauche" $s\colon T \to \mathcal{H}om(T,T)$ image inverse de $\mu\colon T \otimes T \to T$ par (3.2.1) et de la trace (3.3.1). D'après (3.2.3) et (3.3.1), Tr est le composé

$$\mathrm{Tr}\colon T \xrightarrow{T\otimes\delta} T \otimes T \otimes T^\vee \xrightarrow{\mu\otimes T^\vee} T \otimes T^\vee = T^\vee \otimes T \xrightarrow{\mathrm{ev}} 1. \tag{8.1.1}$$

8.2. Notons X l'objet [1] de $\mathrm{Rep}(S_t, A)$. Pour tout $\otimes$-foncteur ACU A-linéaire F de $\mathrm{Rep}(S_t, A)$ dans une catégorie pseudo-abélienne A-linéaire $\mathcal{T}$ à produit tensoriel ACU, l'objet $T = F(X)$ de $\mathcal{T}$ hérite des propriétés suivantes de X: il admet un dual, est de dimension l'endomorphisme $t\colon\ 1 \to 1$ de 1, est muni d'une structure d'algèbre ACU, et si Tr est la trace correspondante, $\mathrm{Tr}(xy)\colon\ T \otimes T \xrightarrow{\mu} T \xrightarrow{\mathrm{Tr}} 1$ fait de T son propre dual.

Proposition 8.3 *Le foncteur $F \mapsto F(X)$ est une équivalence de la catégorie des $\otimes$-foncteurs de* $\mathrm{Rep}(S_t, A)$ *dans $\mathcal{T}$ avec la catégorie des objets T comme ci-dessus et de leurs isomorphismes.*

En d'autres termes, la donnée de T se prolonge en celle d'un $\otimes$-foncteur F de $\mathrm{Rep}(S_t, A)$ dans $\mathcal{T}$ tel que $F(X) = T$, et ce prolongement est unique à isomorphisme unique près.

Preuve La catégorie $\mathrm{Rep}(S_t, A)$ est l'enveloppe pseudo-abélienne de la sous-catégorie pleine des $X^{\otimes U}$. En effet, $X^{\otimes U}$ est somme directe des $[U/R]$ pour R une relation d'équivalence sur U. Partant de T, il suffit donc de montrer l'existence et l'unicité du prolongement F aux $X^{\otimes U}$.

Dans $\mathrm{Rep}(S_t, A)$, $\mathrm{Hom}(X^{\otimes U}, 1) = \mathrm{Hom}(\oplus[U/R], 1)$ est le A-module libre de base les partitions de l'ensemble U. Par autodualité de X, $\mathrm{Hom}(X^{\otimes U}, X^{\otimes V})$ a de même pour base les partitions de $U \amalg V$. Soit $[\mathcal{P}]$ le morphisme défini par la partition $\mathcal{P}$. On a

$$[\mathcal{P}] = \otimes\left(X^{\otimes U\cap P} \xrightarrow{\ m\ } X \xrightarrow{\ m'\ } X^{\otimes V\cap P}\right), \tag{8.3.1}$$

le produit tensoriel étant étendu aux parts de $\mathcal{P}$, m étant un produit itéré, et m' le transposé d'un produit itéré. Pour $[\mathcal{P}]\colon\ X^{\otimes U} \to X^{\otimes V}$ et $[Q]\colon\ X^{\otimes V} \to X^{\otimes W}$, soient $\langle Q, \mathcal{P}\rangle$ la partition de $U \amalg V \amalg W$ engendrée par $\mathcal{P}$ et Q. Sa trace sur $U \amalg V$ (resp. $V \amalg W$) est plus grossière que $\mathcal{P}$ (resp. Q), et elle est la plus fine à avoir ces propriétés. Soient $\langle Q, \mathcal{P}\rangle_{U\amalg W}$ sa trace sur $U \amalg W$ et n le nombre de parts de $\langle Q, \mathcal{P}\rangle$ contenues dans V. On a

$$[Q] \circ [\mathcal{P}] = t^n\,[\langle Q, \mathcal{P}\rangle_{U\amalg W}]\,. \tag{8.3.2}$$

En particulier, pour $U = V = W$, $\mathrm{End}(X^{\otimes U})$ est l'algèbre de partitions considérée par T. Halverson et A. Ram (2003).

Pour vérifier (8.3.1) et (8.3.2), le plus simple est de se ramener au cas de $\mathrm{Rep}(S_I)$, où $X^{\otimes U}$ est libre de base les applications $f\colon\ U \to I$, et où $[\mathcal{P}](e_f)$ est Σe_g, la somme étant étendue aux g tels que $f \amalg g\colon\ U \amalg V \to I$ soit constant sur les parts de $\mathcal{P}$.

Pour T comme en 8.2, un $\otimes$-foncteur *ACU* A-linéaire de $\mathrm{Rep}(S_t, A)$ dans $\mathcal{T}$ envoyant X sur T doit envoyer $X^{\otimes U}$ sur $T^{\otimes U}$, et $[\mathcal{P}]\colon X^{\otimes U} \to X^{\otimes V}$ sur le produit tensoriel $[\mathcal{P}]'$ des composés de multiplications et multiplications transposées

$$[\mathcal{P}]_T = \bigotimes_P \left(T^{\otimes(U\cap P)} \to T \to T^{\otimes(V\cap P)}\right). \tag{8.3.3}$$

Il est donc déterminé (à isomorphisme unique près) par T. L'existence d'un tel foncteur, et 8.3, résultent du

Lemme 8.4 *Pour T comme en* 8.2, *le composé de morphismes $[\mathcal{P}]_T$ est donné comme en* (8.3.2) *par*

$$[Q]_T[\mathcal{P}]_T = t^n\,[\langle Q, \mathcal{P}\rangle_{U\amalg W}]_T\,. \tag{8.4.1}$$

Pour tout objet Y de $\mathcal{T}$ muni d'une autodualité symétrique, l'application

$$\begin{aligned}&\mathrm{Hom}(Y^{\otimes U}, Y^{\otimes V}) \to \mathrm{Hom}(Y^{\otimes U\amalg V}, 1):\\ &f \longmapsto (f)\colon\ Y^{\otimes U\amalg V} = Y^{\otimes U}\otimes Y^{\otimes V} \xrightarrow{f\otimes Y^{\otimes V}} Y^{\otimes V}\otimes Y^{\otimes V} \xrightarrow{\mathrm{ev}^{\otimes V}} 1\end{aligned}$$

est bijective. Cette construction est duale de (3.2.4). On laisse au lecteur le soin de vérifier que ce codage $f \mapsto (f)$ a les propriétés suivantes.

Lemme 8.5 (i) *Le code de $gf\colon Y^{\otimes U} \to Y^{\otimes V} \to Y^{\otimes W}$ est le composé*

$$Y^{\otimes U}\otimes Y^{\otimes W} \xrightarrow{Y^{\otimes U}\otimes\delta^{\otimes V}\otimes Y^{\otimes W}} Y^{\otimes U}\otimes Y^{\otimes V}\otimes Y^{\otimes V}\otimes Y^{\otimes W} \xrightarrow{(f)\otimes(g)} 1.$$

(ii) *Le transposé $f^t\colon Y^{\otimes V} \to Y^{\otimes U}$ de $f\colon Y^{\otimes U} \to Y^{\otimes V}$ a le même code que f.*

(iii) *Pour $f\colon Y^{\otimes U} \to Y^{\otimes V}$ et $g\colon Y^{\otimes W} \to Y^{\otimes V}$, le code de $g^t f\colon Y^{\otimes U} \to Y^{\otimes W}$ est le composé*

$$Y^{\otimes U}\otimes Y^{\otimes W} \xrightarrow{f\otimes g} Y^{\otimes V}\otimes Y^{\otimes V} \xrightarrow{\mathrm{ev}^{\otimes V}} 1.$$

8.6. Nous appliquerons 8.5 à T, muni de son autodualité symétrique $\mathrm{Tr}(xy)$. En 8.6 et 8.7, nous utiliserons seulement que l'autodualité est de la forme $\tau\mu\colon T\otimes T \to T \to 1$ pour un morphisme $\tau\colon T \to 1$.

Le code du produit itéré $m_p\colon T^{\otimes p} \to T$ est

$$\tau m_{p+1}\colon\ T^{\otimes p}\otimes T \xrightarrow{m_p\otimes T} T\otimes T \xrightarrow{\mu} T \xrightarrow{\tau} 1.$$

D'après 8.5 (ii) (iii), le code du composé du produit itéré m_p et du transposé m_q^t du produit itéré m_q est

$$\tau m_{p+q}\colon\ T^{\otimes p} \otimes T^{\otimes q} \xrightarrow{m_p \otimes m_q} T \otimes T \xrightarrow{\mu} T \xrightarrow{\tau} 1.$$

Le code d'un produit tensoriel étant le produit tensoriel des codes, le code de $[\mathcal{P}]_T\colon\ T^{\otimes U} \to T^{\otimes V}$ est

$$\text{code } [\mathcal{P}]_T = \otimes(T^{\otimes P} \xrightarrow{m_P} T \xrightarrow{\tau} 1), \tag{8.6.1}$$

le produit étant étendu aux parts $P \subset U \amalg V$ de $\mathcal{P}$ et m_P étant le produit itéré $T^{\otimes P} \to T$.

Pour calculer le code de $[Q]_T[\mathcal{P}]_T$ par 8.5 (i), il nous reste à calculer l'effet sur un morphisme (8.6.1) d'un “contraction”: composition avec $\delta\colon\ 1 \to T \otimes T$. C'est ce qui est fait dans les lemmes qui suivent.

Lemme 8.7 *Le composé*

$$T^{\otimes p} \otimes T^{\otimes q} \xrightarrow{\delta} T^{\otimes p} \otimes T \otimes T \otimes T^{\otimes q} \xrightarrow{\tau\mu_{p+1} \otimes \tau\mu_{q+1}} 1 \tag{8.7.1}$$

est $\tau\mu_{p+q}$.

Preuve D'après 8.5 (i) (ii), (8.7.1) est le code du composé du morphisme $m_p\colon\ T^{\otimes p} \to T$, de code τm_{p+1}, et du transposé du morphisme $m_q\colon\ T^{\otimes q} \to T$, de code τm_{q+1}. Calculons ce code par 8.5 (iii): (8.7.1) est

$$\tau m_{p+q}\colon\ T^{\otimes p} \otimes T^{\otimes q} \xrightarrow{m_p \otimes m_q} T \otimes T \xrightarrow{\mu} T \xrightarrow{\tau} 1\ .$$

Lemme 8.8 *Le composé*

$$1 \xrightarrow{\delta} T \otimes T \xrightarrow{\mu} T \tag{8.8.1}$$

est l'unité de T.

Preuve Le code de l'unité $u\colon\ 1 \to T$ de T est le composé

$$T = 1 \otimes T \xrightarrow{u \otimes T} T \otimes T \xrightarrow{\mu} T \xrightarrow{\tau} 1,$$

égal à τ. Un morphisme de $T^{\otimes P}$ dans 1 étant son propre code, il résulte de 8.5 (ii) que u et τ sont transposés l'un de l'autre.

La trace Tr est le composé (8.1.1). Par associativité de μ, c'est encore le composé

$$T = T \otimes 1 \xrightarrow{T\otimes(8.8.1)} T \otimes T \xrightarrow{\mu} T \xrightarrow{\tau} 1,$$

i.e. le code de (8.8.1). Les codes τ de l'unité et $\mathrm{Tr} = \tau$ de (8.1.1) sont donc égaux; 8.8 en résulte.

8.9 Preuve de 8.4 D'après 8.5 (i), le code de $[Q]_T \circ [\mathcal{P}]_T$ est déduit du produit tensoriel des codes (8.6.1) de $[Q]_T$ et $[\mathcal{P}]_T$:

$$\left(T^{\otimes U} \otimes T^{\otimes V}\right) \otimes \left(T^{\otimes V} \otimes T^{\otimes W}\right) \to 1 \tag{8.4.1}$$

par une série de "contractions": $1 \to T \otimes T$ indexées par V. Il se décompose selon les parts R de $\langle \mathcal{P}, Q\rangle$. pour chaque part R, si U', V', W' sont les traces de R sur U, V, W, le facteur correspondant $T^{\otimes U'} \otimes T^{\otimes W'} \to 1$ est déduit du facteur

$$\left(T^{\otimes U'} \otimes T^{\otimes V'}\right) \otimes \left(T^{\otimes V'} \otimes T^{\otimes W'}\right) \to 1$$

de (8.4.1) par des contractions analogues, indexées par V'. Si R rencontre U ou W, une application itérée de 8.7 et 8.8 montre que le résultat est τm, pour m le produit itéré $T^{\otimes U'} \otimes T^{\otimes W'} \to T$. Sinon, une application itérée de 8.7 et 8.8 fournit finalement

$$1 \xrightarrow{\delta} T \otimes T \xrightarrow{\mu} T \xrightarrow{\mathrm{Tr}} 1,$$

égal à ev $\delta = \dim T = t$.

8.10. Supposons la catégorie $\mathcal{T}$ tensorielle sur k. On dispose alors de rudiments de géométrie algébrique *dans* $\mathcal{T}$ (Deligne 1990). Soient T comme en 8.2, $\mathbf{I} := \mathrm{Spec}(T)$, et $S_{\mathbf{I}}$ le $\mathcal{T}$-schéma en groupe des automorphismes de $\mathbf{I}$. C'est le sous-groupe fermé de $GL(T)$ (voir 10.8) qui respecte la structure d'algèbre $\mu\colon T \otimes T \to T$ de T. Pour tout $\mathcal{T}$-schéma Y, $S_{\mathbf{I}}(Y)$ est le groupe des automorphismes du Y-schéma $\mathbf{I}_Y := \mathbf{I} \times Y$.

Soit $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}})$ la catégorie des représentations $\rho\colon S_{\mathbf{I}} \to GL(V)$ de $S_{\mathbf{I}}$ sur un objet de $\mathcal{T}$. C'est une catégorie tensorielle sur k et, par construction, T en est un objet. Le $\otimes$-foncteur $\mathrm{Rep}(S_t, k) \to \mathcal{T}\colon X \longmapsto T$ construit en 8.3 se factorise donc par le foncteur analogue

$$\mathrm{Rep}(S_t, k) \to \mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}})\colon X \longmapsto T \tag{8.10.1}$$

suivi du foncteur d'oubli de $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}})$ dans $\mathcal{T}$. On notera $[U]_{\mathbf{I}}$ l'image de $[U]$ par (8.10.1).

En 8.20, nous introduirons une sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon)$ de $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}})$ par laquelle se factorise (8.10.1). Elle est plus naturelle que $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}})$, mais inutile pour l'instant.

Proposition 8.11 *Le* $\otimes$*-foncteur* (8.10.1) *de* $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ *dans* $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}})$ *est surjectif sur les* Hom.

Puisqu'un $\otimes$-foncteur commute aux $\mathcal{H}om$ et respecte l'isomorphisme de $\mathrm{Hom}(V, W)$ avec $\mathrm{Hom}(1, \mathcal{H}om(V, W))$, il suffit de vérifier la surjectivité 8.11 pour $\mathrm{Hom}(1, [U])$. En d'autres termes, il suffit de vérifier que les invariants de $S_{\mathbf{I}}$ agissant sur $[U]_{\mathbf{I}}$ sont réduits à l'image du morphisme $1 \to [U]_{\mathbf{I}}$ unité de l'algèbre $[U]_{\mathbf{I}}$. La preuve sera donnée en 8.18. Elle paraphrase l'arguments trivial suivant, qui s'applique à $\mathrm{Rep}(S_I)$. On veut prouver que toute fonction S_I-invariante f sur $\mathrm{Inj}(U, I)$ est constante, i.e. que f prend la même valeur sur deux injections $j_1, j_2 \colon U \hookrightarrow I$. Si $W = j_1(U) \cup j_2(U)$, j_1 et j_2 se factorisent par $j'_1, j'_2 \colon U \hookrightarrow W$ suivis de $j \colon W \hookrightarrow I$. Il existe une permutation σ' de W qui transforme j'_1 et j'_2. Prolongeant σ' en $\sigma \in S_I$, on obtient σ qui transforme j_1 en j_2 et garantit que $f(j_1) = f(j_2)$.

8.12. La structure de I. Rappelons qu'un *sous-schéma fermé* d'un $\mathcal{T}$-schéma $\mathrm{Spec}(A)$ est un $\mathcal{T}$-schéma $\mathrm{Spec}(A/a)$, pour A/a un quotient de A. Il est dit *ouvert et fermé* si l'idéal a est engendré par un idempotent, i.e. s'il existe $e \colon 1 \to A$ idempotent pour la multiplication de A tel que a soit l'image de la “multiplication par e”: $A = A \otimes 1 \xrightarrow{A \otimes e} A \otimes A \longrightarrow A$. Si tel est le cas, l'idempotent e est unique, et il existe un unique sous-schéma fermé $\mathrm{Spec}(A/b)$ de $\mathrm{Spec}(A)$, le *complémentaire* de $\mathrm{Spec}(A/a)$, tel que

$$\mathrm{Spec}(A/a) \amalg \mathrm{Spec}(A/b) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spec}(A).$$

L'idéal b est engendré par l'idempotent $1 - e$. Les idempotents de l'algèbre *ACU* A formant une algèbre booléenne, on dispose pour les sous-schémas ouverts et fermés du calcul booléen habituel.

Lemme 8.13 *La diagonale de* $\mathbf{I} \times \mathbf{I}$ *est un sous-schéma ouvert et fermé.*

Preuve Dans $\mathrm{Rep}(S_t, k)$, l'isomorphisme de $X^{\otimes U}$ avec le produit des $[U/R]$ est compatible aux structures d'algèbres (vérification directe, ou par réduction au cas de $\mathrm{Rep}(S_I)$). De plus, pour $U = \{1, 2\}$ et R la relation d'équivalence grossière, pour laquelle $[U/R] \simeq X$, la projection $X^{\otimes 2} \to [U/R] = X$ est le produit, de sorte que $\mathrm{Spec}(U/R)$ est la diagonale de $\mathrm{Spec}(X)^2$, et que $\mathrm{Spec}(X)^2 = \mathrm{Spec}([2]) \amalg$ diagonale.

Appliquant le $\otimes$-foncteur 8.10.1, on a déduit que

$$\mathbf{I}^2 = \mathrm{Spec}([2]_{\mathbf{I}}) \amalg \text{ diagonale.}$$

Cette décomposition prouve 8.13.

Par image inverse, les diagonales de $\mathbf{I}^U$ sont elles aussi ouvertes et fermées.

Dans la décomposition $\mathrm{Spec}(X)^U = \amalg \mathrm{Spec}([U/R])$, les $\mathrm{Spec}([U/R])$ pour R non discret sont contenus dans une diagonale, et chaque diagonale est somme disjointe de tels $\mathrm{Spec}([U/R])$. Appliquant 8.10.1, on a donc

Lemme 8.14 *Le sous-schéma* $\mathrm{Spec}([U]_{\mathbf{I}})$ *de* $\mathbf{I}^U$ *est le sous-schéma ouvert et fermé complément des diagonales.*

Pour Y un $\mathcal{T}$-schéma, deux sections s, t de $\mathbf{I}_Y = \mathbf{I} \times Y/Y$, définies par $s', t' \colon Y \to \mathbf{I}$, sont dites *disjointes* si $(s', t') \colon Y \to \mathbf{I}^2$ se factorise par le complément de la diagonale. Deux sections quelconques sont disjointes sur un sous-schéma ouvert et fermé de Y, et égales sur son complément. D'après 8.14, $\mathrm{Spec}([U]_{\mathbf{I}})$ représente le foncteur

$$Y \longmapsto \{\text{famille } (s_u)_{u \in U} \text{ de sections disjointes de } \mathbf{I}_Y\}.$$

Ceci justifie la notation $\mathrm{Inj}(U, \mathbf{I}) := \mathrm{Spec}([U]_{\mathbf{I}})$.

8.15. Le $\mathcal{T}$-schéma $\mathbf{I} \times \mathrm{Inj}(U, \mathbf{I})$ représente donc le foncteur $Y \mapsto \{$sections $(s_u)_{u \in U}$ et s_0 de $\mathbf{I}_Y$, les s_u étant disjointes$\}$. Il se décompose en U copies de $\mathrm{Inj}(U, \mathbf{I})$, données par $s_0 = s_u$ $(u \in U)$, et un reste $\mathrm{Inj}(U \amalg \{0\}, \mathbf{I})$. Chaque copie de $\mathrm{Inj}(U, \mathbf{I})$ se projette isomorphiquement sur le deuxième facteur, et $\mathbf{I}_{\mathrm{Inj}(U,\mathbf{I})}$ est donc somme disjointe de sections indexées par U, et d'un reste. Une permutation de U définit un automorphisme de $\mathbf{I}_{\mathrm{Inj}(U,\mathbf{I})}$ qui permute ces sections et est l'identité sur le reste. Ceci définit

$$S_U \to S_{\mathbf{I}}(\mathrm{Inj}(U, \mathbf{I})). \tag{8.15.1}$$

Plus généralement, sur toute base Y, la donnée de sections disjointes $(s_u)_{u \in U}$ de $\mathbf{I}_Y$ définit un morphisme

$$S_U \to S_{\mathbf{I}}(Y), \tag{8.15.2}$$

dont (8.15.1) est le cas universel.

Lemme 8.16 *Pour tout $\mathcal{T}$-schéma $Y = \mathrm{Spec}(A)$ et toute "fonction" f sur $\mathrm{Inj}(U, \mathbf{I})_Y$, i.e. tout $f \colon 1 \to A \otimes [U]_{\mathbf{I}}$, si f est invariante par $S_{\mathbf{I}}$, alors après tout changement de base $Z \to Y$ et pour toutes sections s, t de $\mathrm{Inj}(U, \mathbf{I})_Z/Z$, on a $f(s) = f(t)$.*

Notation: $f(s)$ est la fonction sur Z image inverse de f par

$$Z \xrightarrow{s} \mathrm{Inj}(U,\mathbf{I})_Z \longrightarrow \mathrm{Inj}(U,\mathbf{I})_Y \ .$$

Preuve La donnée de s, t est celle de deux familles de sections disjointes de $\mathbf{I}_Z$, indexée par U. Découpand Z en parties ouvertes et fermées, on se ramène à supposer que pour chaque $u, v \in U$, s_u et t_v sont soit égales, soit disjointes: il existe un recollement de U et U en W, et une famille disjointe de sections indexées par W, qui induise s et t. Les deux copies de U dans W sont transformées l'une de l'autre par une permutation de W, et on conclut par (8.15.2) appliqué à W.

Corollaire 8.17 *Une fonction f comme en* 8.16 *provient d'une fonction sur Y, i.e. de $\tilde{f}\colon\ 1 \to A$.*

Preuve Si $\mathrm{Inj}(U,\mathbf{I})$ est vide, i.e. si $[U]_{\mathbf{I}} = 0$, l'assertion est triviale. Si $\mathrm{Inj}(U,\mathbf{I})$ est non vide, $J := \mathrm{Inj}(U,\mathbf{I})_Y$ est fidèlement plat sur Y, et la conclusion de 8.16, dans le cas universel où $Z = J \times_Y J$, dit que les deux images inverses de f sur $J \times_Y J$ coïncident. La preuve usuelle de la descente fidèlement plate (SGA 1 VIII 1.1, 1.5) donne que le système cosimplicial d'algèbres affines $\mathcal{O}((J/Y)^n)$ est une résolution de A, et 8.17 en résulte.

Corollaire 8.18 *Les invariants de $S_{\mathbf{I}}$ agissant sur $[U]_{\mathbf{I}}$ sont réduits à l'image de l'unité $1 \to [U]_{\mathbf{I}}$.*

Soit V l'espace des invariants. Prenons $A = \mathrm{Sym}(V^*)$ et la fonction

$$f\colon\ 1 \xrightarrow{\delta} V^* \otimes V \subset A \otimes [U]_{\mathbf{I}}.$$

Si $(1) \subset V$ est l'image de l'unité, 8.17 assure que f se factorise par $A \otimes (1)$, donc par$V^\vee \otimes (1)$: l'identité de V se factorise par (1), et $V = (1)$. Ceci conclut la preuve de 8.11.

Proposition 8.19 *Quel que soit t, la $\otimes$-catégorie* $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ *admet un plongement pleinement fidèle dans une catégorie tensorielle sur k.*

Si t n'est pas un entier ≥ 0, la catégorie $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ est tensorielle sur k (2.18), et 8.19 est trivial. On peut donc supposer, et on supposera, que t est un entier $n \geq 0$. Dans ce cas, le plongement 8.19 est nécessairement dans une catégorie tensorielle qui n'est pas semi-simple: le foncteur naturel dans $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$ n'est pas fidèle (il annule $[U]$ pour $|U| > n$), il y a donc dans $\mathrm{Rep}(S_t)$ des morphismes négligeables non nuls (6.2), leur image est encore négligeable, et on applique 5.7.

Construction Dans la catégorie $\mathrm{Rep}(S_{-1}, k)$, soit T l'algèbre produit de $[1]$ et de $n+1$ copies de l'algèbre 1. Elle vérifie les hypothèses de 8.2: on a $\dim(T) = \dim([1]) + n + 1 = -1 + n + 1 = n = t$ et les autres hypothèses sont vérifiées par $[1]$, par 1, et sont stables par produit.

Posons $\mathbf{I} := \mathrm{Spec}(T)$ et considérons le $\otimes$-foncteur (8.10.2) de $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ dans $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon)$ défini par T. D'après 8.11, ce foncteur est surjectif sur les Hom. Reste à voir qu'il est injectif sur les Hom. Comme dans la preuve de 8.11 (lignes suivant 8.11), il suffit de le vérifier pour $\mathrm{Hom}(1, [U])$: il s'agit de montrer que l'unité de l'algèbre $[U]_{\mathbf{I}}$ est non nulle, i.e. que le $\mathrm{Rep}(S_{-1}, k)$-schéma $\mathrm{Inj}(U, \mathbf{I})$ est non vide. Il contient en effet le schéma non vide $\mathrm{Inj}(U, \mathrm{Spec}([1])) = \mathrm{Spec}([U]$ dans $\mathrm{Rep}(S_{-1}, k))$.

8.20. Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k et π son groupe fondamental (Deligne 1990) 8.13. Ce $\mathcal{T}$-schéma en groupe agit fonctoriellement sur tout objet de $\mathcal{T}$, et l'action est compatible au produit tensoriel. En particulier, pour $\mathbf{I} = \mathrm{Spec}(T)$ comme en 8.10, l'action de π sur T définit un homomorphisme $\varepsilon\colon \pi \to S_{\mathbf{I}}$, et T appartient à la sous-catégorie pleine $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon)$ de $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}})$, d'objets les représentations ρ de $S_{\mathbf{I}}$ sur un objet V de $\mathcal{T}$, telle que l'action $\rho \circ \varepsilon$ de π sur V soit l'action canonique de π sur V. Par 8.3, le foncteur (8.10.1) de $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ dans $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}})$ se factorise par

$$\mathrm{Rep}(S_t, k) \to \mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon). \tag{8.20.1}$$

Pour X dans $\mathcal{T}$, l'action triviale de $S_{\mathbf{I}}$ sur X fait de X un objet de $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}})$. Cet objet n'est dans $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon)$ que si l'action canonique de π sur X est triviale, i.e. que si X est une somme de copies de 1 (loc. cit. 8.18).

Je conjecture que $\mathrm{Rep}(S_I, \varepsilon)$ n'est autre que la sous-catégorie pleine de $\mathrm{Rep}(S_I)$ d'objets les sous-quotients de sommes de puissances tensorielles de T.

Conjecture 8.21. *Soit F un $\otimes$-foncteur ACU de* $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ *dans une catégorie tensorielle $\mathcal{T}$ sur k. Comme en* 8.2 *et 8.10, soient $T := F(X)$ et* $\mathbf{I} := \mathrm{Spec}(T)$. *Soit F_1 le foncteur* (8.20.1) *de* $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ *dans* $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon)$ *par lequel se factorise F. Je conjecture que*

(8.21.1) Si t n'est pas un entier $_{\geq}0$, le foncteur F_1 est une équivalence.

(8.21.2) Si t est un entier $n_{\geq}0$, la catégorie $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon)$, munie du foncteur $F_1\colon \mathrm{Rep}(S_t, k) \to \mathrm{Rep}(S_I, \varepsilon)$ est équivalente à l'une des suivantes:

(a) $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$, munie du foncteur naturel de $\mathrm{Rep}(S_t, k)$ dans $\mathrm{Rep}(\mathbf{S}_n)$;
(b) celle construite en 8.19 complété par 8.20, i.e. $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon)$ pour T l'objet $[1] \oplus 1^{n+1}$ de $\mathrm{Rep}(S_{-1}, k)$.

9 Groupes Orthogonaux

Les séries des groupes orthogonaux $\mathrm{O}(n)$ et des groupes linéaires $GL(n)$ donnent lieu à des résultats analogues à ceux expliqués pour les $\mathbf{S}_n$. Nous traitons ici du cas des groupes orthogonaux, et dans la section suivante du cas des groupes linéaires. Pour des formules de dimension parallèles à (7.4.1) et à 7.5, nous renvoyons à (Deligne 1996).

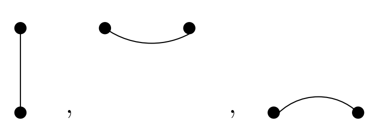
9.1. Soit X un espace vectoriel de dimension n sur k muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée B, et soit $B^\vee \in X \otimes X$ la forme bilinéaire duale. D'après le premier théorème fondamental de la théorie des invariants pour $\mathrm{O}(X)$, tout invariant de $\mathrm{O}(X)$ dans $X^{\otimes U}$ (U un ensemble fini) est combinaison linéaire des invariants obtenus comme suit: prendre une partition de U en parts à 2 éléments, pour chaque part prendre l'invariant $B^\vee \in X \otimes X$, et prendre le produit tensoriel de ces $\check{B}$. De plus, pour $n {\geq} |U|/2$, ces invariants sont linéairement indépendants.

L'autodualité de X permet d'identifier $\mathcal{H}om(X^{\otimes U}, X^{\otimes V})$ à $X^{\otimes(U \amalg V)}$ et, dans la catégorie des représentations de $\mathrm{O}(X)$, $\mathrm{Hom}(X^{\otimes U}, X^{\otimes V}) = \mathrm{Hom}(1, \mathcal{H}om(X^{\otimes U}, X^{\otimes V}))$ aux invariants de $\mathrm{O}(X)$ dans $X^{\otimes(U \amalg V)}$. Ce qui précède fournit une famille génératrice de $\mathrm{Hom}(X^{\otimes U}, X^{\otimes V})$, paramétrée par un ensemble indépendant de X et de n. C'est une base si $n {\geq} (|U| + |V|)/2$. Explicitons: une partition $\mathcal{P}$ en parts à 2 éléments de $U \amalg V$ s'identifie à la donnée de décompositions $U = U' \cup U''$, $V = V' \cup V''$ (réunion disjointes), d'une bijection $U' \xrightarrow{\sim} V'$, et de partitions en parts à 2 éléments de U'' et de V''. La partition de U'' (resp. V'') fournit un morphisme $X^{\otimes U''} \to 1$ (resp. $1 \to X^{\otimes V''}$) produit tensoriel de morphismes $B\colon X \otimes X \to 1$ (resp. $B^\vee\colon 1 \to X \otimes X$), et le morphisme de $X^{\otimes U}$ dans $X^{\otimes V}$ correspondant à $\mathcal{P}$ est le composé

$$X^{\otimes U} = X^{\otimes U'} \otimes X^{\otimes U''} \to X^{\otimes U'} \xrightarrow{\sim} X^{\otimes V'} \to X^{\otimes V'} \otimes X^{\otimes V''} = X^{\otimes V}.$$

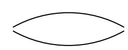
Cette description rend claire qu'à la somme disjointe d'ensembles et de partitions correspond le produit tensoriel de représentations et de morphismes.

Représentation graphique: le générateur de $\mathrm{Hom}(X^{\otimes U}, X^{\otimes V})$ correspondant à $\mathcal{P}$ est représenté par un ensemble de points indexés par U en première ligne, un ensemble de points indexés par V en seconde ligne, et, tracés entre les lignes, des traits joignant les points dans la même part de $\mathcal{P}$. Exemples:

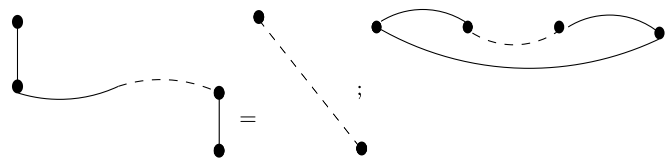


sont respectivement l'identité de X, $B\colon\ X\otimes X\to 1$ et $B^\vee\colon\ 1\to X\otimes X$.

Dans cette représentation graphique, la composition des morphismes correspond à joindre les graphes, à omettre les cercles qui apparaissent, et, si k cercles étaient apparus, à multiplier le résultat par n^k. Exemple–clé:

 $= n$ fois l'identité de 1

(qui représentée par une page blanche). Autre exemple: le composé



est n fois l'identité de X.

La composition est donc donnée par une formule polynômiale (à coefficients entiers) en n. Remplaçant n par une indéterminée T, on obtient la catégorie à produit tensoriel ACU librement engendrée par un objet muni d'une autodualité symétrique:

Définition 9.2 $\mathrm{Rep}_0(\mathrm{O}(T))$ est la catégorie $\mathbb{Z}[T]$-linéaire suivante:

objets: ensembles finis. On note $X_0^{\otimes U}$ l'ensemble fini U, vu comme objet de $\mathrm{Rep}_0(\mathrm{O}(T))$.

$\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes U}, X_0^{\otimes V})$: le $\mathbb{Z}[T]$-module libre de base les partitions de $U \amalg V$ en parts à 2 éléments.

composition: comme en 9.1, avec n remplacé par T.

La somme disjointe d'ensembles finis munit $\mathrm{Rep}_0(\mathrm{O}(T))$ d'un produit tensoriel ACU rigide.

9.3. Pour A un anneau commutatif et $t\in A$, on notera $\mathrm{Rep}_0(\mathrm{O}(t),A)$ la catégorie A-linéaire déduite de $\mathrm{Rep}_0(\mathrm{O}(T))$ en gardant les mêmes objets et en prenant pour groupes Hom ceux déduits des précédents par l'extension des scalaires $\mathbb{Z}[T]\to A$, $T\mapsto t$. On notera $\mathrm{Rep}_1(\mathrm{O}(t),A)$ celle qui s'en déduit par adjonction formelle de somme directes, et $\mathrm{Rep}(\mathrm{O}(t),A)$ son enveloppe pseudo-abélienne. Ces catégories sont encore munies d'un produit tensoriel ACU rigide, déduit de celui de $\mathrm{Rep}_0(\mathrm{O}(T))$, et elles vérifient $\mathrm{End}(1)=A$. La catégorie $\mathrm{Rep}_0(\mathrm{O}(t),A)$ a la propriété universelle suivante:

Proposition 9.4 *Soit $\mathcal{A}$ une catégorie A-linéaire à produit tensoriel ACU et telle que* $\mathrm{End}(1) = A$. *Le foncteur* $F \mapsto F(X_0)$ *est une équivalence de*

(a) *la catégorie* $\mathcal{H}om_A^{\otimes}(\mathrm{Rep}_0(O(t), A), \mathcal{A})$ *des $\otimes$-foncteurs A-linéaires, avec*
(b) *la catégorie des objets de $\mathcal{A}$ de dimension t munis d'une autodualité symétrique, et de leurs isomorphismes.*

Le même énoncé vaut avec Rep_1 (resp. Rep) si $\mathcal{A}$ est additive (resp. pseudo-abélienne).

9.5. Pour chaque entier n, définissons comme suit un triple (G, ε, X) où G est un super groupe, ε est un élément de G d'ordre divisant 2 tel que l'automorphisme intérieur $\mathrm{int}(\varepsilon)$ induise sur $\mathcal{O}(G)$ sa graduation modulo 2, et X est une (super) représentation de G de graduation modulo 2 définie par l'action de ε, i.e. X est un objet de $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$. Selon la valeur de n, on prend:

$n \geq 0$:	$\mathrm{O}(n)$, l'identité de $\mathrm{O}(n)$, la représentation évidente;
$n = -2m \leq 0$:	$\mathrm{Sp}(2m)$, -1, la représentation évidente, considérée comme purement impaire;
$n = 1 - 2m \leq 0$:	$\mathrm{OSp}(1, 2m)$, la matrice diagonale $(1, -1, \ldots, -1)$, la représentation évidente.

Dans chaque cas, on a $\dim(X) = n$, X est munie d'une autodualité symétrique, la catégorie $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$ est semi-simple, et le foncteur $X_0 \mapsto X$ de $\mathrm{Rep}(\mathrm{O}(t), k)$ dans $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$ est surjectif sur les Hom. La dernière assertion reformule le premier théorème principal de la théorie des invariants pour $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{Sp}(2m)$ et $\mathrm{OSp}(1, 2m)$. Le cas de $\mathrm{OSp}(1, 2m)$ est traité dans l'appendice, qui contient aussi une nouvelle preuve de la complète réductivité des super représentations de $\mathrm{OSp}(1, 2m)$. Répétant la preuve de 6.2, on obtient le théorème suivant.

Théorème 9.6 *Supposons que t soit un entier n. Alors, avec les notations ci-dessus, le foncteur* $X_0 \mapsto X$ *de* $\mathrm{Rep}(O(t), k)$ *dans* $\mathrm{Rep}(G, \varepsilon)$ *induit une équivalence*

$$\mathrm{Rep}(O(t), k)/(\textit{négligeables}) \to \mathrm{Rep}(G, \varepsilon).$$

L'algèbre des endomorphismes de $X_0^{\otimes n}$, dans $\mathrm{Rep}(\mathrm{O}(t), k)$, est l'algèbre de Brauer $D_n(t)$. D'après H. Wenzl (1988), si t n'est pas un entier, c'est un produit d'algèbres de matrices. Il en résulte que

Théorème 9.7 (H. Wenzl – au langage près) *Si t n'est pas un entier, la catégorie* $\mathrm{Rep}(O(t),k)$ *est abélienne semi-simple. C'est donc une catégorie tensorielle.*

Preuve Puisque $t \neq 0$, 1 est un facteur direct de $X_0 \otimes X_0$, et $X_0^{\otimes(n-2)}$ est donc un facteur direct de $X_0^{\otimes n}$. Soit (S_i) un système de représentants des classes d'isomorphie de $D_n(t)$-modules simples, de sorte que $D_n \xrightarrow{\sim} \prod \mathrm{End}_k(S_i)$. La structure de $D_n(t)$-module de $X_0^{\otimes n}$ fournit une décomposition $X_0^{\otimes n} = \oplus Y_i \otimes S_i$ de $X_0^{\otimes n}$ en somme d'objets Y_i tels que $\mathrm{End}(Y_i) = k$ et que $\mathrm{Hom}(Y_i, Y_j) = 0$ pour $i \neq j$. Puisque $X_0^{\otimes n'}$ est un facteur direct de $X_0^{\otimes n}$ si $n' \leq n$ est de même parité que n, chacun de ces $X_0^{\otimes n'}$ est somme de copies de Y_i. Répétant l'argument pour $X_0^{\otimes(n-1)}$, observant que $\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes p}, X_0^{\otimes q}) = 0$ si p et q n'ont pas la même parité, et prenant n de plus en plus grand, on obtient un système d'objets simples en lesquels se décompose tout objet de $\mathrm{Rep}(\mathrm{O}(t),k)$.

Dans le langage catégorique, la preuve que H. Wenzl donne de la semi-simplicité de $D_n(t)$ peut être présentée comme suit.

Proposition 9.8

(i) *Si t n'est pas un entier, ou est un entier de valeur absolue $|t|{\geq}n-1$, la sous-catégorie pseudo-abélienne* $\mathrm{Rep}(O(t),k)^{(n)}$ *de* $\mathrm{Rep}(O(t),k)$ *engendrée pas les $X_0^{\otimes i}$ pour $i \leq n$ est semi-simple. Plus précisément, elle contient des objets Y_λ, indexés par les partitions des entiers $\leq n$, tels que* $\mathrm{End}(Y_\lambda) = k$, *que* $\mathrm{Hom}(Y_\lambda, Y_\mu) = 0$ *pour $\lambda \neq \mu$, et que tout objet soit somme de copies des Y_λ;*

(ii) *Si t n'est pas un entier, ou est un entier de valeur absolue $|t|{\geq}n$, la forme bilinéaire* $\mathrm{Tr}(uv)$ *sur* $D_n(t) = \mathrm{Hom}(X_0^{\otimes n}, X_0^{\otimes n})$ *est non dégénérée.*

Preuve On construit les Y_λ et on prouve (i) et (ii) par récurrence sur n. De l'hypothèse que $(9.8)_i$ est vrai pour $i < n$, il s'agit de déduire $(9.8)_n$. Si $n = 0$, $\mathrm{Rep}(\mathrm{O}(t))^{(n)}$ est réduite aux multiples de 1, et on vérifie $(i)_0$ en prenant $Y_\lambda = 1$ pour λ la partition vide de l'entier 0. Pour $n = 1$, prendre en outre $Y_{(1)} = X_0$. On a $D_0(t) = D_1(t) = k$, la forme trace étant respectivement uv et tuv, et ceci vérifie $(\mathrm{ii})_n$ pour $n = 0$ ou 1.

Supposons que $n{\geq}2$. L'autodualité de X_0 permet d'identifier entre eux les $\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes p}, X_0^{\otimes q})$ pour $p + q = a$, et les formes bilinéaires $\mathrm{Tr}(uv)$:

$$\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes p}, X_0^{\otimes q}) \otimes \mathrm{Hom}(X_0^{\otimes q}, X_0^{\otimes p}) \to k$$

se correspondent par ces identifications (3.4). L'hypothèse de récurrence assure donc que les formes bilinéaires $\mathrm{Tr}(uv)$:

$$\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes n}, X_0^{\otimes p}) \otimes \mathrm{Hom}(X_0^{\otimes p}, X_0^{\otimes n}) \to k$$

sont non dégénérées pour $p \leq n-2$. Pour $|\lambda| \leq n-2$, la forme

$$\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes n}, Y_\lambda) \otimes \mathrm{Hom}(Y_\lambda \otimes X_0^{\otimes n}) \to k \tag{9.8.1}$$

est non dégénérée, comme facteur direct de la précédente. On a $\mathrm{End}(Y_\lambda) = k$ et (9.8.1) est $\dim(Y_\lambda).uv$. La forme uv est donc non dégénérée et, par 3.9 (ii), $X_0^{\otimes n}$ a une décomposition

$$X_0^{\otimes n} = \bigoplus_{|\lambda| \leq n-2} \mathrm{Hom}(Y_\lambda, X_0^{\otimes n}) \otimes Y_\lambda \oplus (X_0^{\otimes n})^*, \quad \text{avec} \tag{9.8.2}$$

$$\mathrm{Hom}(Y_\lambda, (X_0^{\otimes n})^*) = \mathrm{Hom}((X_0^{\otimes n})^*, Y_\lambda) = 0 \tag{9.8.3}$$

pour $|\lambda| \leq n-2$. La nullité (9.8.3) vaut encore pour $|\lambda| = n-1$, car $\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes p}, X_0^{\otimes q}) = 0$ si p et q n'ont pas la même parité.. Le groupe symétrique $\mathbf{S}_n$ agit sur $X_0^{\otimes n}$ et sur $(X_0^{\otimes n})^*$. On vérifie que cette action induit un isomorphisme

$$k[\mathbf{S}_n] \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}\left((X_0^{\otimes n})^*\right).$$

Noter que le but est le quotient de $D_n(t)$ par l'idéal des endomorphismes se factorisant par un $X_0^{\otimes p}$ pour $p \leq n-2$ ou, ce qui revient au même, $p \leq n-1$. Comme en 5.3 on vérifie $(\mathrm{i})_n$ en définissant les Y_λ pour $|\lambda| = n$ par

$$(X_0^{\otimes n})^* = \oplus Y_\lambda \otimes \lambda. \tag{9.8.4}$$

(décomposition $\mathbf{S}_n$-équivariante). Les décompositions (9.8.2) et (9.8.4) ramènent $(\mathrm{ii})_n$ à

$$\dim Y_\lambda \neq 0 \qquad \text{pour } |\lambda| = n. \tag{9.8.5}$$

H. Wenzl prouve (9.8.5) en calculant $\dim Y_\lambda$ à partir de la formule des caractères de H. Weyl, pour l'image de Y_λ dans $\mathrm{Rep}(\mathrm{SO}(2N+1))$ pour N grand et $t = 2N+1$: la dimension est donnée par un polynôme en t qui ne s'annule que pour t entier de valeur absolue $|t| < n$.

10 Groupes Linéaires

10.1. Soient X un espace vectoriel de dimension n sur k et $X^\vee$ son dual. D'après le premier théorème fondamental de la théorie des invariants pour

$GL(X)$, tout invariant de $GL(X)$ dans $T(U,V) := X^{\otimes U} \otimes X^{\vee \otimes V}$ (U et V ensembles finis) est combinaison linéaire des invariants obtenus comme suit: prendre une bijection de U avec V, et le produit tensoriel de $\delta\colon\ 1 \to X \otimes X^{\vee}$ correspondant. Pour $n \geq |U|$, ces invariants sont linéairement indépendants.

L'isomorphisme naturel

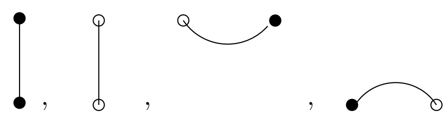
$$\mathrm{Hom}(T(U,V), T(U',V')) = \mathrm{Hom}(1, T(V \amalg U', U \amalg V')) \tag{10.1.1}$$

fournit alors une famille génératrice de l'espace vectoriel des morphismes de représentations de $T(U,V)$ dans $T(U',V')$, qui est une base si $n \geq |V \amalg U'|$.

Représentation graphique: le générateur de $\mathrm{Hom}(T(U,V), T(U',V'))$ correspondant à la bijection φ de $V \amalg U'$ avec $U \amalg V'$ est représenté par

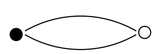
a) en première ligne, un ensemble de points notés $\bullet$ indexés par U et un ensemble de points notés $\circ$ indexés par V;
b) de même en deuxième ligne, les points étant indexés par U' et V';
c) entre les lignes, des traits joignant les points qui se correspondent par φ.

Exemples:



sont respectivement l'identité de X, celle de $X^{\vee}$, $\mathrm{ev}\colon\ X^{\vee} \otimes X \to 1$ et $\delta\colon\ 1 \to X \otimes X^{\vee}$.

Dans cette représentation graphique, la composition des morphismes correspond à joindre les graphes, à omettre les cercles qui apparaissent, et, si k cercles étaient apparus, à multiplier le résultat par n^k. Exemple-clé:



$= n$ fois l'identité de 1
(représentée par une page blanche).

Le produit tensoriel correspond à la somme disjointe.

La composition est donc donnée par une formule polynômiale en n. Remplaçant n par une indéterminée T, on obtient la catégorie à produit tensoriel ACU librement engendrée par un objet et son dual:

Définition 10.2 $\mathrm{Rep}_0(GL(T))$ est la $\otimes$-catégorie $\mathbb{Z}[T]$-linéaire suivante:

objets: paires d'ensembles finis U et V. On note $X_0^{\otimes U} \otimes X_0^{\vee\otimes V}$ la paire (U, V) vue comme objet de $\mathrm{Rep}_0(GL(T))$;

$\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes U} \otimes X_0^{\vee\otimes V}, X_0^{\otimes U'} \otimes X_0^{\vee\otimes V'})$: le $\mathbb{Z}[T]$-module libre de base les bijections de $U \amalg V'$ avec $V \amalg U'$;

composition: comme en 10.1, avec n remplacé par T;

produit tensoriel: somme disjointe.

On définit $\mathrm{Rep}_0(GL(t), A)$, $\mathrm{Rep}_1(GL(t), A)$ et $\mathrm{Rep}(GL(t), A)$ comme en 9.3, mutatis mutandis. La catégorie $\mathrm{Rep}_0(GL(t), A)$ a la propriété universelle suivante.

Proposition 10.3 *Soit $\mathcal{A}$ comme en 9.4. Le foncteur $F \mapsto F(X_0)$ est une équivalence de $\mathcal{H}om_A^{\otimes}(\mathrm{Rep}_0(GL(t), A), \mathcal{A})$ avec la catégorie des objets de $\mathcal{A}$ admettant un dual et de dimension t, et de leurs isomorphismes.*

On a les mêmes variantes qu'en 9.4 pour Rep_1 et Rep.

Pour n un entier ≥ 0 (resp. ≤ 0), notons ε l'élément central 1 (resp. -1) de $GL(|n|)$, et X la super représentation $k^{|n|}$ de $GL(|n|)$, purement de parité 0 (resp. 1). Répétant la preuve de 6.2, on obtient le théorème suivant, parallèle à 9.6.

Théorème 10.4 *Supposons que $t \in k$ soit un entier n. Le foncteur $X_0 \mapsto X$ de $\mathrm{Rep}(GL(t), k)$ dans $\mathrm{Rep}(GL(|n|), \varepsilon)$ induit une équivalence*

$$\mathrm{Rep}(GL(t), k)/(\textit{négligeables}) \to \mathrm{Rep}(GL(|n|), \varepsilon).$$

Théorème 10.5 (parallèle à 9.7) *Si t n'est pas un entier, la catégorie $\mathrm{Rep}(GL(t), k)$ est abélienne semi-simple. C'est donc une catégorie tensorielle.*

Plus précisément, on a

Proposition 10.6 (parallèle à 9.8)

(i) *Si t n'est pas un entier, ou est un entier de valeur absolue $|t| \geq n-1$, la catégorie pseudo-abélienne $\mathrm{Rep}(GL(t), k)^{(n)}$ de $\mathrm{Rep}(GL(t), k)$ engendrée par les $T(p, q) := X_0^{\otimes p} \otimes X_0^{\vee\otimes q}$ pour $p + q \leq n$ est semi-simple. Plus précisément, elle contient des objets $Y_{\lambda,\mu}$ indexés par les paires de partitions λ, μ avec $|\lambda| + |\mu| \leq n$, tels que $\mathrm{End}(Y_{\lambda,\mu}) = k$, que $\mathrm{Hom}(Y_{\lambda,\mu}, Y_{\lambda',\mu'}) = 0$ pour $(\lambda, \mu) \neq (\lambda', \mu')$ et que pour $p + q \leq n$, $T(p, q)$ soit somme de $Y_{\lambda,\mu}$ avec $|\lambda| \leq p$, $|\mu| \leq q$ et $p - q = |\lambda| - |\mu|$.*

(ii) *Si t n'est pas un entier, ou est un entier de valeur absolue $|t|{\geq}n$, la forme bilinéaire* $\mathrm{Tr}(uv)$ *sur* $\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes n}, X_0^{\otimes n})$ *est non dégénérée.*

Preuve On procède par récurrence sur n comme en 9.8.

Si $n = 0$, $\mathrm{Rep}(GL(t))^{(n)}$ est réduite aux multiples de 1 et on vérifie (i)_0 en prenant $Y_{\emptyset,\emptyset} = 1$ pour $\emptyset$ la partition vide de l'entier 0. Pour $n = 1$, prendre en outre $Y_{(1),\emptyset} = X$ et $Y_{\emptyset,(1)} = X^\vee$. La forme trace sur $\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes n}, X_0^{\otimes n})$ est respectivement uv et tuv, et ceci vérifie (ii)_n pour $n = 0$ ou 1.

Supposons $n{\geq}2$. Si $p-q \neq r-s$, on a $\mathrm{Hom}(T(p,q), T(r,s)) = 0$. Si $p-q = r-s$, tant $\mathrm{Hom}(T(p,q), T(r,s))$ que $\mathrm{Hom}(T(r,s), T(p,q))$ s'identifient à $\mathrm{Hom}(X^{\otimes m}, X^{\otimes m})$ pour $m = p+s = q+r$, et l'accouplement

$$\mathrm{Tr}(uv)\colon\ \mathrm{Hom}(T(p,q), T(r,s)) \otimes \mathrm{Hom}(T(r,s), T(p,q)) \to k \tag{10.6.1}$$

correspond à la forme bilinéaire $\mathrm{Tr}(uv)$ sur $\mathrm{End}(X_0^{\otimes m})$ par cette identification.

Si $p + q = n$ et que $r < p$ et $s < q$, $p - q = r - s$, on a $m < n$ et l'hypothèse de récurrence (ii) assume que (10.6.1) est une dualité parfaite. Si $|\lambda| < p$, $|\mu| < q$ et que $|\lambda - |\mu| = p - q$, $Y_{\lambda,\mu}$, déjà défini par récurrence, est facteur direct de $T(|\lambda|, |\mu|)$ et

$$\mathrm{Tr}(uv)\colon\ \mathrm{Hom}(T(p,q), Y_{\lambda,\mu}) \otimes \mathrm{Hom}(Y_{\lambda,\mu}, T(p,q)) \to k$$

est non dégénéré. Comme en 9.8, on en conclut que

$$T(p,q) = \bigoplus\nolimits_{\substack{|\lambda|<p,|\mu|<q,\\ |\lambda|-|\mu|=p-q}} \mathrm{Hom}(Y_{\lambda,\mu}, T(p,q)) \otimes Y_{\lambda,\mu} \oplus T^*(p,q) \tag{10.6.2}$$

avec

$$\mathrm{Hom}(Y_{\lambda,\mu}, T^*(p,q)) = \mathrm{Hom}(T^*(p,q), Y_{\lambda,\mu}) = 0 \tag{10.6.3}$$

pour λ, μ comme en (10.6.2).

Le groupe $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_q$ agit sur $T^*(p,q)$. On vérifie que cette action induit un isomorphisme

$$k\,[\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_q] \xrightarrow{\sim} \mathrm{End}(T^*(p,q)).$$

Comme en (9.8.4), (i)_n est vérifié si on définit $Y_{\lambda,\mu}$ pour $|\lambda| = p$, $|\mu| = q$ par

$$T^*(p,q) = \oplus Y_{\lambda,\mu} \otimes \lambda \otimes \mu \tag{10.6.4}$$

(décomposition $\mathbf{S}_p \times \mathbf{S}_q$-équivariante). Pour vérifier (ii) pour n, il reste à vérifier que si t n'est pas un entier ou que $|t|{\geq}n$, pour toute partition λ de n, on a pour les facteurs $Y_{\lambda,\emptyset}$ de $X_0^{\otimes n} = T(n,0) = T^*(n,0)$ la non-nullité

$$\dim(Y_{\lambda,\emptyset}) \neq 0. \tag{10.6.5}$$

Pour σ dans $\mathbf{S}_n$, notons $m(\sigma)$ le nombre de cycles de σ. Les $Y_\lambda := Y_{\lambda,\emptyset}$ pour $|\lambda| = n$ sont définis par la décomposition de $X_0^{\otimes n}$ en $\oplus Y_\lambda \otimes \lambda$, et on a donc

$$\dim Y_\lambda = \frac{1}{n!} \sum \lambda(\sigma) \operatorname{Tr}(\sigma, X_0^{\otimes n}) = P_\lambda(t) \tag{10.6.6}$$

pour $P_\lambda(T)$ le polynôme $\frac{1}{n!} \sum \lambda(\sigma) T^{m(\sigma)}$. Pour calculer le polynôme P_λ, appliquons la même formule dans la catégorie des représentations de $GL(N)$, N étant choisi assez grand pour que $\lambda_{N+1} = 0$. La représentation Y_λ est ici celle de poids dominant λ, et sa dimension est donnée par la formule de H. Weyl

$$\prod_{1 \leq i < j \leq N} ((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j)) \Big/ \prod_{1 \leq i < j \leq N} (j - i). \tag{10.6.7}$$

Posons $r := \lambda_1^*$. Le quotient (10.6.7) se simplifie en

$$\prod_{1 \leq i \leq r} \Big[\prod_{i+1 \leq j \leq N} ((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j)) \Big/ \prod_{i+1 \leq j \leq N} (j - i) \Big]. \tag{10.6.8}$$

Le i-ième facteur est

$$\prod_{i+1 \leq j \leq r} ((\lambda_i - i) - (\lambda_j - j)) \,.\Big\{ \prod_{r+1 \leq j \leq N} ((\lambda_i - i) + j) \Big/ \prod_{i+1 \leq j \leq N} (j - i) \Big\}$$

et

$$\{ \dots \} = (N - i + \lambda_i) \dots (N - i + 1)/(\lambda_i + r - i)!$$

Le quotient (10.6.7) est donc un polynôme en N. Il coïncide nécessairement avec $P_\lambda(N)$ et (10.6.8) montre que les zéros du polynôme P_λ sont les entiers de la forme $j - i$ avec $1 \leq j \leq \lambda_i$, i.e. sont les entiers dans l'intervalle $[1 - \lambda_1^*, \lambda_1 - 1]$. La non-nullité (10.6.5) en résulte.

Remarque 10.7. La dimension de $Y_{\lambda,\mu}$ est de même donnée par une formule polynômiale en t, $\dim Y_{\lambda,\mu} = P_{\lambda,\mu}(t)$. Le polynôme $P_{\lambda,\mu}$ est explicité dans (Deligne 1996). Ses zéros sont des entiers, et il donne lieu à des phénomènes analogues à 7.5.

10.8 (parallèle à 8.10 complété par 8.20). Soient $\mathcal{T}$ une catégorie tensorielle sur k et X un objet de $\mathcal{T}$. Le foncteur qui à un $\mathcal{T}$-schéma $Y = \operatorname{Spec}(A)$ attache le groupe des automorphismes du A-module $X_A := A \otimes X$ est représentable par un $\mathcal{T}$-schéma en groupe, qu'on notera $GL(X)$. Le foncteur $Y \mapsto \operatorname{End}_A(X_A)$ est en effet représenté par l'espace affine $\mathcal{E}nd(X)$, i.e. par $\operatorname{Spec}(\operatorname{Sym}^*(\mathcal{E}nd(X)^\vee))$, et $GL(X)$ est le sous-schéma fermé de

$\mathcal{E}nd(X) \times \mathcal{E}nd(X)$ défini par l'équation $gh = \mathrm{Id}$: le noyau d'une double flèche de $\mathcal{E}nd(X) \times \mathcal{E}nd(X)$ dans $\mathcal{E}nd(X)$.

L'action sur X du groupe fondamental π de $\mathcal{T}$ définit un homomorphisme $\varepsilon\colon\ \pi \to GL(X)$. On note $\mathrm{Rep}(GL(X), \varepsilon)$ la catégorie des représentations $\rho\colon\ GL(X) \to GL(V)$ de $GL(X)$ sur un objet de $\mathcal{T}$ telles que $\rho \circ \varepsilon$ soit l'action canonique de π sur V. C'est une catégorie tensorielle sur k et, par construction, l'action de $GL(X)$ sur X fait de X un objet de $\mathrm{Rep}(GL(X), \varepsilon)$. Si X est de dimension t, le $\otimes$-foncteur $X_0 \mapsto X$ de $\mathrm{Rep}(GL(t), k)$ dans $\mathcal{T}$ (10.3) se factorise donc par le foncteur analogue

$$\mathrm{Rep}(GL(t), k) \to \mathrm{Rep}(GL(X), \varepsilon). \tag{10.8.1}$$

Proposition 10.9 (parallèle à 8.11) *Le foncteur (10.8.1) est surjectif sur les* Hom.

Lemme 10.10 *Si $n \neq m$,* $\mathrm{Hom}_{GL(X)}(1, X^{\otimes n} \otimes X^{\vee \otimes m}) = 0$.

Un espace vectoriel de dimension finie sur k sera identifié à un objet de $\mathcal{T}$ par $V \mapsto V \otimes 1$. Un espace vectoriel sera de même identifié à un Ind-objet de $\mathcal{T}$, et par là un schéma affine sur k à un schéma affine en $\mathcal{T}$. Exemple: $\mathbb{G}_m$, vu comme schéma en $\mathcal{T}$, représente le foncteur qui à $Y = \mathrm{Spec}(A)$ associe le groupe multiplicatif de la k-algèbre $\mathrm{Hom}(1, A)$.

Preuve On dispose d'un homomorphisme $\mathbb{G}_m \to GL(X)$, qui envoie λ dans $\mathbb{G}_m$ sur la multiplication par λ. Sur $X^{\otimes n} \otimes X^{\vee \otimes m}$, l'action est par λ^{n-m}. Si $n \neq m$, les invariants sont donc réduits à zéro.

10.11. La crochet $xy - yx$ fait de $\mathcal{E}nd(X)$ une algèbre de Lie dans $\mathcal{T}$, que nous noterons $\mathfrak{gl}(X)$. Comme classiquement, une action de $GL(X)$ sur un objet V induit une action de $\mathfrak{gl}(X)$, que l'on peut construire à partir de l'action des groupes $GL(X)(A)$ sur $V_A = V \otimes A$ pour A un algèbre commutative dans $\mathcal{T}$ de la forme $1 \oplus M$ avec $M^2 = 0$.

Puisqu'un $\otimes$-foncteur commute aux $\mathcal{H}om$ respecte l'isomorphisme de $\mathrm{Hom}(V, W)$ avec $\mathrm{Hom}(1, \mathcal{H}om(V, W))$, il suffit de vérifier la surjectivité 10.9 pour $\mathrm{Hom}(1, X_0^{\otimes n} \otimes X_0^{\vee \otimes m})$. Par 10.10, il suffit de considérer le cas $n = m$, qui revient à la surjectivité de $k[\mathbf{S}_n] \to \mathrm{End}_{GL(X)}(X^{\otimes n})$. Cette surjectivité résulte de celle de

$$k[\mathbf{S}_n] \to \mathrm{End}_{\mathfrak{gl}(X)}(X^{\otimes n}). \tag{10.11.1}$$

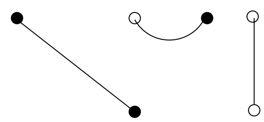
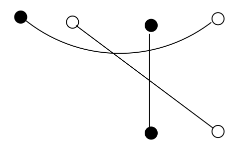
Pour $n = 1$, (10.11.1) affirme que les seuls endomorphismes de X qui commutent à l'action de $\mathfrak{gl}(X)$ sont les multiples de l'identité. On montrera plus précisément que le commutant de $\mathfrak{gl}(X)$ dans $\mathcal{E}nd(X)$, i.e. le centre de $\mathcal{E}nd(X)$, est l'image du morphisme "unité": $1 \to \mathcal{E}nd(X)$.

Lemme 10.12 *Pour tout objet Y d'une catégorie tensorielle, le centre de $\mathcal{E}nd(Y)$ est réduit à l'image de l'unité $1 \to \mathcal{E}nd(Y)$.*

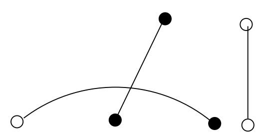
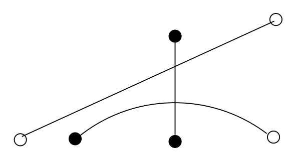
Preuve Le crochet $[\quad]: \mathcal{E}nd(Y) \otimes \mathcal{E}nd(Y) \to \mathcal{E}nd(Y)$ fournit par déplacement du premier facteur de gauche à droite un morphisme

$$\mathcal{E}nd(Y) \to \mathcal{E}nd(Y)^\vee \otimes \mathcal{E}nd(Y) \tag{10.12.1}$$

dont le centre de $\mathcal{E}nd(Y)$ est le noyau. Le morphisme (10.12.1) est la différence de deux morphismes analogues, déduits des multiplications à gauche m_s et à droite m_d. Représentation graphique, pour $\mathcal{E}nd(Y)$ identifié à $Y \otimes Y^\vee$, représenté par $\bullet\ \circ$, et $\mathcal{E}nd(Y)^\vee = (Y \otimes Y^\vee)^\vee = Y^\vee \otimes Y$ représenté par $\circ\ \bullet$:

m_s :  , m_d :  ,

donnant lieu aux morphismes $\mathcal{E}nd(Y) \to \mathcal{E}nd(Y)^\vee \otimes \mathcal{E}nd(Y)$

 et 

Réordonnant les facteurs au but, on reconnaît dans ces morphismes les morphismes $Y \otimes Y^\vee = 1 \otimes Y \otimes Y^\vee \to Y \otimes Y^\vee \otimes Y \otimes Y^\vee$ et $Y \otimes Y^\vee = Y \otimes Y^\vee \otimes 1 \to Y \otimes Y^\vee \otimes Y \otimes Y^\vee$. Il nous faut vérifier que leur différence a pour noyau l'image de $\delta\colon 1 \to Y \otimes Y^\vee$.

Si $Y = 0$, l'assertion est triviale. Sinon, l'identité de Y est non nulle, et $\delta\colon 1 \to Y \otimes Y^\vee$, non nul, est un monomorphisme, de par la simplicité de l'objet 1. Soit Z le conoyau de δ. La filtration $1 \subset Y \otimes Y^\vee$ de $Y \otimes Y^\vee$ founit une filtration de $Y \otimes Y^\vee \otimes Y \otimes Y^\vee$ de quotients successifs 1, $Z \oplus Z$ et $Z \otimes Z$. Les morphismes considérés induisent les deux morphismes évident de $Z = Y \otimes Y^\vee/1$ dans $Z \oplus Z$ et que leur différence ait un noyau réduit à 1 en résulte.

10.13. Notre preuve de la surjectivité de (10.11.1) est calquée sur le cas où $\mathcal{T}$ est la catégorie tensorielle des super espaces vectoriels, tel que traité par A. N. Sergeev (1984). Il suffit de montrer que, pour l'action de $\mathfrak{gl}(X)$ sur $X^{\otimes n}$, le commutant de $\mathfrak{gl}(X)$ dans $\mathcal{E}nd(X^{\otimes n})$ est réduit à l'image de $k[\mathbf{S}_n]$. Si $\mathcal{U}\,\mathfrak{gl}(X)$ est l'algèbre enveloppante de $\mathfrak{gl}(X)$, ce commutant est le commutant dans $\mathcal{E}nd(X^{\otimes n})$ de l'image de $\mathcal{U}\,\mathfrak{gl}(X)$.

Lemme 10.14 *Pour l'action naturelle de $\mathfrak{gl}(X)$ sur $X^{\otimes n}$, l'image de $\mathcal{U}\,\mathfrak{gl}(X)$ est le commutant dans $\mathcal{E}nd(X^{\otimes n})$ de l'image de $k[\mathbf{S}_n]$.*

Montrons que 10.14 implique la surjectivité de (10.11.1). L'action de $\mathbf{S}_n$ sur $X^{\otimes n}$ fournit une décomposition (1.10.3) de $X^{\otimes n}$ en $\oplus(X^{\otimes n})_\lambda \otimes \lambda$. Il résulte de 10.12 que si Y et Z sont non nuls, le commutant de $\mathcal{E}nd(Y)$ dans $\mathcal{E}nd(Y \otimes Z) = \mathcal{E}nd(Y) \otimes \mathcal{E}nd(Z)$ est réduit à $\mathcal{E}nd(Z)$. Le commutant de S_n dans $\mathcal{E}nd(X^{\otimes n})$ est la somme des $\mathcal{E}nd((X^{\otimes n})_\lambda)$. Il a pour commutant la somme des $\mathcal{E}nd(\lambda)$ pour $(X^{\otimes n})_\lambda \neq 0$, qui n'est autre par (1.10.2) que l'image de $k[\mathbf{S}_n]$.

Preuve de 10.14 L'algèbre de Lie $\mathfrak{gl}(X)$ est l'algèbre de Lie déduite de l'algèbre associative à unité $\mathcal{E}nd(X)$, et son action sur X est déduite de la structure de $\mathcal{E}nd(X)$-module de X. Soient plus généralement A un objet de $\mathcal{T}$ muni d'une structure d'algèbre associative à unité, et M un A-module. Pour $n_{\geq}0$, $M^{\otimes n}$ est alors un $A^{\otimes n}$-module, et donc aussi un $(A^{\otimes n})^{\mathbf{S}_n}$-module. Dans le cas particulier de $\mathcal{E}nd(X)$ et X, $A^{\otimes n}$ est $\mathcal{E}nd(X^{\otimes n})$, et $(A^{\otimes n})^{\mathbf{S}_n}$ le commutant de $\mathbf{S}_n$.

Soit A_{Lie} l'algèbre de Lie déduite de A. Elle agit sur M, donc sur $M^{\otimes n}$, ceci fait de $M^{\otimes n}$ un $\mathcal{U}(A_{\text{Lie}})$-module, et 10.14 est un cas particulier du

Lemme 10.15 (cf. A. N. Sergeev (1984) prop. 5) *L'image de $\mathcal{U}(A_{\text{Lie}})$ dans $\mathcal{E}nd(M^{\otimes n})$ coïncide avec l'image de $(A^{\otimes n})^{\mathbf{S}_n}$ dans $\mathcal{E}nd(M^{\otimes n})$.*

Preuve Soient q_i $(1 \leq i \leq n)$ les morphismes naturels $x \mapsto 1\otimes\cdots\otimes x\otimes\cdots\otimes 1$ (x en i-ème position) de A dans $A^{\otimes n}$. L'action de A_{Lie} sur $M^{\otimes n}$ est déduite du morphisme

$$\sum q_i\colon\ A_{\text{Lie}} \to (A^{\otimes n})^{S_n}_{\text{Lie}} \subset A^{\otimes n}_{\text{Lie}}, \tag{10.15.1}$$

et la structure de $\mathcal{U}(A_{\text{Lie}})$-module de $M^{\otimes n}$ est donc déduite du morphisme

$$\mathcal{U}\,A_{\text{Lie}} \to (A^{\otimes n})^{S_n} \tag{10.15.2}$$

qui correspond à (10.15.1) par adjonction. Ceci prouve l'inclusion $\subset$.

Le produit symétrisé $\sum\limits_\sigma x_{\sigma(1)} \dots x_{\sigma(n)}$ de $(A_{\text{Lie}})^{\otimes n}$ dans $\mathcal{U}\,A_{\text{Lie}}$ se factorise par $\text{Sym}^n(A_{\text{Lie}})$. Le lemme 10.15 résulte de ce que

Lemme 10.16 *Le morphisme composé*

$$\text{Sym}^n(A_{\text{Lie}}) \to \mathcal{U}(A_{\text{Lie}}) \to (A^{\otimes})^{\mathbf{S}_n} \tag{10.16.1}$$

est un isomorphisme.

Preuve Notons $*$ le produit dans l'algèbre A. Le composé de (10.16.1) avec l'isomorphisme $(A^{\otimes n})^{\mathbf{S}_n} \to (A^{\otimes n})_{\mathbf{S}_n} = \mathrm{Sym}^n(A)$ est, avec des notations évidentes

$$x_1 \dots x_n \longmapsto \sum_{f:\ [1,n]\to[1,n]} \prod_i \Big(\mathop{*}_{f(j)=i} x_j \Big), \tag{10.16.2}$$

le produit dans A étant près dans l'ordre des j. Filtrons A par $A \supset$ (image de l'unité $1 \to A$) $\supset 0$. Par produit tensoriel et passage aux coinvariants, cette filtration en fournit une sur $\mathrm{Sym}^n(A)$. Notons-la F. On laisse au lecteur le soin de vérifier que (10.16.2) respecte F et induit sur chaque Gr^i_F la multiplication par un entier strictement positif. Le lemme en résulte.

Proposition 10.17 (parallèle à 8.19) *Quel que soit t, la $\otimes$-catégorie* $\mathrm{Rep}(GL(t), k)$ *admet un plongement pleinement fidèle dans une catégorie tensorielle sur k.*

Preuve Choisissons t_1 et t_2 non entiers tels que $t_1+t_2 = t$. Considérons le produit tensoriel des catégories $\mathrm{Rep}_0(GL(t_1), k)$ et $\mathrm{Rep}_0(GL(t_2), k)$, d'objets les $Z_1 \otimes Z_2$ avec Z_i dans $\mathrm{Rep}_0(GL(t_i), k)$, et de groupes Hom les

$$\mathrm{Hom}(Z_1' \otimes Z_2', Z_1'' \otimes Z_2'') = \mathrm{Hom}(Z_1', Z_1'') \otimes \mathrm{Hom}(Z_2', Z_2'').$$

C'est la catégorie à produit tensoriel *ACU* librement engendrée par des objets X_1 et X_2 de dimension t_1 et t_2 et leurs duaux. On déduit de 10.5 et 10.6 que son enveloppe pseudo-abélienne est une catégorie abélienne semi-simple, d'objets simples les $Y_1 \otimes Y_2$ pour Y_i simple dans $\mathrm{Rep}(GL(t_i), k)$. On la note $\mathrm{Rep}(GL(t_1) \times GL(t_2), k)$. Elle est tensorielle sur k. L'objet $X := X_1 \oplus X_2$ est de dimension t. Avec les notations de 10.8, il définit un $\otimes$-foncteur (10.8.1) de $\mathrm{Rep}(GL(t), k)$ dans $\mathrm{Rep}(GL(X), \varepsilon)$. Ce foncteur est surjectif sur les Hom (10.9). Par le même argument qu'en 10.9, pour vérifier qu'il est injectif sur les Hom, il suffit de le vérifier pour $\mathrm{Hom}(1, X_0^{\otimes n} \otimes X_0^{\vee\otimes m})$, ou, ce qui revient au même, pour $\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes m}, X_0^{\otimes n})$. Si $m \neq n$, $\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes m}, X_0^{\otimes n}) = 0$ et l'assertion est triviale. Si $m = n$, $\mathrm{Hom}(X_0^{\otimes n}, X_0^{\otimes n})$ $= k[\mathbf{S}_n]$. L'action de $\mathbf{S}_n$ sur $X^{\otimes n}$ induit son action sur $X_1^{\otimes n}$ et, puisque $k[S_n]$ s'injecte dans $\mathrm{Hom}(X_1^{\otimes n}, X_1^{\otimes n})$, qu'il s'injecte dans $\mathrm{Hom}(X^{\otimes n}, X^{\otimes n})$ en résulte.

Question 10.18 (parallèle à 8.21). Soit X un objet d'une catégorie tensorielle sur k.

(10.18.1) Si $\dim(X)$ n'est pas un entier, le foncteur (10.8.1) de $\mathrm{Rep}(GL(\dim X), k)$ dans $\mathrm{Rep}(GL(X), \varepsilon)$ est-il une équivalence?

(10.16.2) Si $\dim(X)$ est un entier n, la catégorie $\mathrm{Rep}(GL(X), \varepsilon)$, munie de l'objet X, est-elle équivalente à l'une des suivantes?

(a) Pour p et q des entiers de différence n: la catégorie des super représentations de $GL(p|q)$, telles que la graduation modulo 2 soit donnée par l'action de la matrice diagonale $(1, \ldots, 1, -1, \ldots, -1)$ avec p "1" et q "-1"; y prendre la représentation évidente.

(b) Pour un choix fixé de t_1 et t_2 comme dans la preuve de 10.17: la catégorie $\mathrm{Rep}(GL(X), \varepsilon)$ de 10.17, munie de X.

Appendice A. Invariants pour $\mathrm{OSp}(1, 2n)$

Soit V la représentation naturelle du super groupe $\mathrm{OSp}(1, 2n)$: elle est de dimension $(1, 2n)$ et est munie d'une forme bilinéaire symétrique invariante $B\colon V \otimes V \to k$. On note $B^\vee$ la forme duale. C'est un élément invariant de $V \otimes V$. Puisque -1 est dans $\mathrm{OSp}(1, 2n)$, $V^{\otimes \ell}$ ne contient d'élément invariant non nul que pour ℓ pair.

Théorème A1 *Tout élément de $V^{\otimes 2\ell}$ invariant sous $\mathrm{OSp}(1, 2n)$ est combinaison linéaire des transformés par $\mathbf{S}_{2\ell}$ de la puissance tensorielle $B^{\vee \ell} := B^{\vee \otimes \ell}$ de $B^\vee$.*

Preuve La formation des invariants étant compatible à l'extension du corps de base k, on se ramène à supposer que V admet une base dans laquelle B ait la forme standard. Pour nous rassurer, choisissons une telle base:

base de la partie paire V^+ de V: e_0;
base de la partie impaire V^- de V: $e_i, e_{i'}$ $(1 \leq i \leq n)$;
éléments de matrice non nuls de B: $B(e_0, e_0) = 1$, $B(e_i, e_{i'}) = 1$, $B(e_{i'}, e_i) = -1$.

Autre description: après toute extension des scalaires de k à une super algèbre commutative, et pour tous vecteurs pairs $\mathbf{x}$ et $\mathbf{x}'$ de coordonnées $(x_0, \chi_i, \chi_{i'})$ et $(x'_0, \chi'_i, \chi'_{i'})$,

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = x_0 x'_0 - \sum (\chi_i \chi'_{i'} - \chi_{i'} \chi'_i).$$

L'élément $B^\vee$ est

$$B^\vee = e_0 \otimes e_0 - \sum e_i \otimes e_{i'} - e_{i'} \otimes e_i.$$

Pour v dans V^-, soit D_v l'élément impair de $\mathrm{osp}(1,2n)$ tel que $D_v(e_0) = v$. Pour w dans V^-, on a

$$D_v(w) = -B(v,w)e_0.$$

Pour $v = e_i$ (resp. $e_{i'}$), on écrira plutôt D_i (resp. $D_{i'}$). Dans l'algèbre enveloppante, soit

$$D = \sum D_i D_{i'} - D_{i'} D_i.$$

C'est un élément de l'idéal d'augmentation de $\mathcal{U}\mathrm{osp}$, fixe sous l'action adjointe de $\mathrm{Sp}(2n)$. Il annule tout osp-invariant.

Notons $\mathfrak{s}$ la symétrisation $\frac{1}{a!}\Sigma\sigma$ pour l'action de $\mathbf{S}_a$ sur $V^{\otimes a}$. Pour ∂ et ∂' deux éléments impairs de $\mathrm{osp}(1,2n)$, on a

$$\begin{aligned}\partial\partial'(e_0^a) \quad = \quad & \sum_{1\le b\le a} \sigma_b(\partial\partial'(e_0)\otimes e_0^{a-1}) \\ & + \sum_{1\le b<c\le a} \sigma_{b,c}(\partial(e_0)\otimes\partial'(e_0)\otimes e_0^{a-2}), \\ & - \sum_{1\le c<b\le a} \sigma_{b,c}(-\partial'(e_0)\otimes\partial(e_0)\otimes e_0^{a-2}),\end{aligned}$$

σ_b (resp. $\sigma_{b,c}$) étant une permutation envoyant 1 sur b (resp. et 2 sur c). On laisse au lecteur le soin de vérifier que $D(e_0) = -2n\, e_0$. On a donc

$$\begin{aligned} D(e_0^a) &= -2na\, e_0^a + a(a-1)\mathfrak{s}\left(e_0^{a-2}\sum e_i\otimes e_{i'} - e_{i'}\otimes e_i\right) \qquad (A.1.1)\\ &= (a(a-1)-2na)e_0^a - a(a-1)\mathfrak{s}(e_0^{a-2}B^\vee) \\ &= -a(2n+1-a)e_0^a - a(a-1)\mathfrak{s}(B^\vee e_0^{a-2}) \end{aligned}$$

D'après la théorie des invariants pour le sous-groupe $\mathrm{Sp}(2n)$ de $\mathrm{OSp}(1,2n)$, tout invariant de $\mathrm{Sp}(2n)$ dans $V^{\otimes a}$ est combinaison linéaire de transformés par $\mathbf{S}_a$ des éléments $B^{\vee m}\otimes e_0^{a-2m}$. Filtrons l'espace I de ces invariants par les sous-espaces $I^{\geq p}$ engendrés par les $\sigma(B^{\vee m}e_0^{a-2m})$ pour σ dans $\mathbf{S}_a$ et $m{\geq}p$. D'après (A.1.1), cette filtration est stable par D et D agit sur $\mathrm{Gr}^p I$ par multiplication par $-(a-2p)(2n+1-(a-2p))$. Pour $a = 2\ell$, cette valeur propre n'est nulle que pour $p = \ell$ et, puisque D annule tout OSp invariant, l'espace des OSp invariants est réduit à $I^{\geq\ell}$.

Une variante de cette construction permet de détermine les invariants de $\mathrm{SO\,Sp}(1,2n)$ dans les puissances tensorielles de V. Dans les puissances tensorielles paires (resp. impaires), ce sont les invariants (resp. anti-invariants) de $\mathrm{OSp}(1,2n)$.

Lemme A2 *Le sous-espace des* SO *Sp-invariants de $V^{\otimes(2n+1)}$ est de dimension* 1*, engendré par un élément $\mathfrak{b}$ de la forme*

$$\mathfrak{b} = \mathfrak{s}\sum A_m e_0^{2n+1-2m}B^{\vee m} \qquad (A.2.1)$$

avec $A_0 \neq 0$.

La preuve de A1 montre que le seul $\mathrm{Gr}^p(I)$ sur lequel D s'annule est $\mathrm{Gr}^0(I)$: le noyau de D sur I est de dimension un, et s'envoie sur $I/I^{\geq 1}$. Puisque $I/I^{\geq 1}$ est fixe sous $\mathbf{S}_{2n+1}$, le noyau de D est fixe lui aussi, engendré par un élément de la forme (A.2.1). Il reste à vérifier qu'il existe un élément non nul dans $V^{\otimes 2n+1}$ fixe sous osp. Soit $\mathfrak{b}$ de la forme (A.2.1). Puisqu'il est fixe sous Sp, pour qu'il soit fixe sous osp, il suffit qu'il soit fixe sous un D_i. On a

$$D_i\mathfrak{b} = \mathfrak{s}\left(e_i \sum (2n+1-2m)A_m e_0^{2n-2m} B^{\vee m}\right).$$

D'autre part,

$$\mathfrak{s}(e_i(e_0 \otimes e_0 - B^\vee)^n) = 0.$$

C'est en effet un élément de $\mathrm{Sym}^{2n+1}(V^-)$, d'espace sous-jacent

$$|\,\mathrm{Sym}^{2n+1}(V^-)| = \overset{2n+1}{\wedge} |V^-| = 0.$$

On a

$$\mathfrak{s}(e_i(e_0 \otimes e_0 - B^\vee)^n) = \mathfrak{s}\left(e_i \sum (-1)^m \binom{n}{m} e_0^{2n-2m} B^{\vee m}\right)$$

et $\mathfrak{b}$ est invariant si

$$A_m = (-1)^m \binom{n}{m} / 2n+1-2m. \tag{A.2.2}$$

Proposition A3 *Pour* $\mathfrak{b}$ *comme en A.2, les invariants de* $\mathrm{SO}\,Sp(1,2n)$ *dans* $V^{\otimes 2\ell+1}$ *sont les combinaisons linéaires de transformés par* $\mathbf{S}_{2\ell+1}$ *de* $\mathfrak{b} \otimes B^{\vee \ell - n}$. *Il n'en existe de non nul que pour* $\ell \geq n$.

Preuve Filtrons l'espace I des $\mathrm{Sp}(2n)$-invariants comme dans la preuve de A.1. Cette fois, le noyau de D agissant sur I est contenu dans $I^{\geq \ell - n}$, et se projette isomorphiquement sur $\mathrm{Gr}^{\ell-n}(I)$. La proposition résulte de ce que les invariants proposés engendrent $\mathrm{Gr}^{\ell-n}(I)$.

Remarque A4. La preuve de A1 et A3 montre que l'action de D sur l'espace des invariants $I(V^{\otimes a})$ de $\mathrm{Sp}(2n)$ dans $V^{\otimes a}$ est semi-simple. Les entiers $(a-2m)(2n+1-(a-2m))$ sont en effets distincts (observer que le premier facteur a la parité de a, le second la parité opposée). De plus, $(V^{\otimes a})^{\mathrm{SO\,Sp}}$ est le noyau de D agissant sur $I(V^{\otimes a})$. La représentation V

étant fidèle et autoduale, tout représentation W de $\mathrm{SO}\,\mathrm{Sp}(1,2n)$ est sous-quotient d'une somme de $V^{\otimes a} \otimes X_a$, avec action triviale sur X_a, et hérite de la même propriété. Le foncteur $W \mapsto W^{\mathrm{SO}\,\mathrm{Sp}}$ est donc exact. On retrouve ainsi le fait connu que la catégorie des représentations de $\mathrm{SO}\,\mathrm{Sp}(1,2n)$ est semi-simple.

Appendix B. Proof of the Conjecture in 8.20, by Victor Ostrik

The goal of this appendix is to present proofs of Conjecture from Section 8.20 and Conjecture 8.21.1. We preserve the notations from Section 8. Thus k is a field of characteristic 0, $\mathcal{T}$ is a tensor category over k, T is an object of $\mathcal{T}$ with the structure of algebra as in 8.2, $\mathbf{I} = \mathrm{Spec}(T)$ and $S_{\mathbf{I}}$ is the group scheme (in $\mathcal{T}$) of automorphisms of $\mathbf{I}$, see 8.10. Finally $\varepsilon : \pi \to S_{\mathbf{I}}$ is the natural homomorphism from the fundamental group π of $\mathcal{T}$ and $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon)$ is the full subcategory of $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}})$ consisting of such representations $\rho : S_{\mathbf{I}} \to GL(V)$ that the action $\rho \circ \varepsilon$ of π on V coincides with the canonical action, see 8.20. The following result is conjectured in 8.20:

Proposition B1 *Any object of the category* $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon)$ *is isomorphic to a subquotient of a direct sum of some tensor powers of* T.

Proof Let $\mathcal{C}$ be the full subcategory of $\mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon)$ whose objects are subquotients of sums of tensor powers of T. It is clear that $\mathcal{C}$ is a tensor category. Let H be the fundamental group of $\mathcal{C}$. Obviously, $S_{\mathbf{I}}$ is contained in (ind-objects of) $\mathcal{C}$ and acts functorially compatibly with tensor products on the objects of $\mathcal{C}$. Thus we have a homomorphism $S_{\mathbf{I}} \to H$. On the other hand since H acts on T we have an obvious map $H \to GL(T)$ and since T generates $\mathcal{C}$ this is actually an embedding $H \subset GL(T)$. Moreover since H respects the multiplication morphism $T \otimes T \to T$ we have $H \subset S_{\mathbf{I}} \subset GL(T)$. The composition of homomorphisms $S_{\mathbf{I}} \to H \subset S_{\mathbf{I}}$ is the identity and therefore $H = S_{\mathbf{I}}$. Now the result follows from (Deligne 1990) 8.17.

□

Corollary B2 (cf. Conjecture 8.21.1) *Let* $F : \mathrm{Rep}(S_t, k) \to \mathcal{T}$ *be a tensor functor preserving the commutativity constraint (=* $\otimes-$*foncteur ACU). Let* F_1 *be the corresponding functor* $\mathrm{Rep}(S_t, k) \to \mathrm{Rep}(S_{\mathbf{I}}, \varepsilon)$*, see 8.20.1. Assume that* t *is not an integer* ≥ 0*. Then* F_1 *is an equivalence of tensor categories.*

Proof First we note that the functor F_1 is fully faithful. Indeed according to 8.11 the functor F_1 is surjective on Hom's. Arguing in the same way as in 8.19 we see that to prove its injectivity on Hom's we need to prove that $[U]_{\mathbf{I}}$ is nonzero. But this is obvious since $\dim[U]_{\mathbf{I}} = t(t-1)\dots(t-|U|+1) \neq 0$. Now Corollary is an immediate consequence of Proposition B1.

$\square$

With the notations of 10.18, a parallel argument shows that any object of the category $\mathrm{Rep}(GL(X), \varepsilon)$ is isomorphic to a subquotient of a sum of $X^{\otimes p} \otimes X^{\vee \otimes q}$, and that the answer to the question (10.18.1) is positive.

References

[1] P. Deligne, *Catégories tannakiennes*, in: Grothendieck Festschrift, vol. 2, Progress in Math. **87**, p. 111–195, Birkhauser, 1990.

[2] P. Deligne, *La série exceptionnelle de groupes de Lie*, Comptes Rendus Acad. Sci. Paris t **323** (1996), 577–582.

[3] P. Deligne and J. S. Milne, *Tannakian categories*, in: Hodge Cycles, Motives and Shimura Varieties, Lecture Notes in Math. **900**, Springer Verlag 101–228, 1982.

[4] J. Frame, G. de B. Robinson and R. Thrall, *The hook graphs of the symmetric group*, Can. J. Math **6** (1954), 316–324.

[5] F. Frobenius, *Uber die Charaktere der symmetrischen Gruppe*, Preussische Akad. der Wissenschaften zu Berlin (1990), p. 516–534, Gesammelte Abhandlungen band III, p. 148.

[6] S. Gelfand and D. Kazhdan, *Examples of tensor categories*, Invent. Math. **109** (1992), 595–617.

[7] T. Halverson and A. Ram, *Partition algebras*, Eur. J. Combin. **26** 6 (2005), 869–921.

[8] N. Saavedra, *Catégories tannakiennes*, Lecture Notes in Math. 265, Springer-Verlag, 1972.

[9] A. N. Sergeev, *The tensor algebra of the identity representation as a module over the Lie superalgebras $GL(n, m)$ and $Q(n)$*, Mat. Sbornik **123** (1984) (in Russian). Translation: Math. USSR Sbornik **51** 2 (1985).

[10] H. Wenzl, *On the structure of Brauer's centralizer algebras*, Ann. of Math. **128** (1988), 173–193.

[11] SGA, *Séminaire de Géométrie algébrique du Bois-Marie*.

[12] SGA1, *Revêtements étales et groupe fondamental*, Dirigé par A. Grothendieck, Lecture Notes in Math. 224, Springer Verlag (1971).

[13] SGA4, *Théorie des topos et cohomologie étale des schémas*, Dirigé par M. Artin, A. Grothendieck et J. L. Verdier. tI: Lecture Notes in Math. 269, Springer Verlag (1972).

School of Mathematics, Institute for Advanced Study, Einstein Drive, Princeton N.J. 08540

E-mail: `deligne@math.ias.edu`