Näherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation.

Von A. Einstein.

Bei der Behandlung der meisten speziellen (nicht prinzipiellen) Probleme auf dem Gebiete der Gravitationstheorie kann man sich damit begnügen, die $g_{\mu\nu}$ in erster Näherung zu berechnen. Dabei bedient man sich mit Vorteil der imaginären Zeitvariable $x_4 = it$ aus denselben Gründen wie in der speziellen Relativitätstheorie. Unter »erster Näherung« ist dabei verstanden, daß die durch die Gleichung

$$g_{\mu\nu} = -\delta_{\mu\nu} + \gamma_{\mu\nu} \tag{1}$$

definierten Größen $\gamma_{\mu\nu}$, welche linearen orthogonalen Transformationen gegenüber Tensorcharakter besitzen, gegen 1 als kleine Größen behandelt werden können, deren Quadrate und Produkte gegen die ersten Potenzen vernachlässigt werden dürfen. Dabei ist $\delta_{\mu\nu} = 1$ bzw. $\delta_{\mu\nu} = 0$, je nachdem $\mu = \nu$ oder $\mu \neq \nu$.

Wir werden zeigen, daß diese $\gamma_{\mu\nu}$ in analoger Weise berechnet werden können wie die retardierten Potentiale der Elektrodynamik. Daraus folgt dann zunächst, daß sich die Gravitationsfelder mit Lichtgeschwindigkeit ausbreiten. Wir werden im Anschluß an diese allgemeine Lösung die Gravitationswellen und deren Entstehungsweise untersuchen. Es hat sich gezeigt, daß die von mir vorgeschlagene Wahl des Bezugssystems gemäß der Bedingung $g = |g_{\mu\nu}| = -1$ für die Berechnung der Felder in erster Näherung nicht vorteilhaft ist. Ich wurde hierauf aufmerksam durch eine briefliche Mitteilung des Astronomen de Sitter, der fand, daß man durch eine andere Wahl des Bezugssystems zu einem einfacheren Ausdruck des Gravitationsfeldes eines ruhenden Massenpunktes gelangen kann, als ich ihn früher gegeben hatte[1]. Ich stütze mich daher im folgenden auf die allgemein invarianten Feldgleichungen.

[1] Sitzungsber. XLVII, 1915, S. 833.

§ 1. Integration der Näherungsgleichungen des Gravitationsfeldes.

Die Feldgleichungen lauten in ihrer kovarianten Form

$$
\left.
\begin{aligned}
R_{\mu\nu} + S_{\mu\nu} &= -\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,T\right)\\
R_{\mu\nu} &= -\sum_{\alpha}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix} + \sum_{\alpha\beta}\begin{Bmatrix}\mu\alpha\\ \beta\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\nu\beta\\ \alpha\end{Bmatrix}\\
S_{\mu\nu} &= \frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\,\sum_{\alpha}\begin{Bmatrix}\mu\nu\\ \alpha\end{Bmatrix}\frac{\partial \log\sqrt{g}}{\partial x_\alpha}
\end{aligned}
\right\}. \tag{1}
$$

Dabei bedeuten die geschweiften Klammern die bekannten CHRISTOFFELschen Symbole, $T_{\mu\nu}$ den kovarianten Energietensor der Materie, T den zugehörigen Skalar. Die Gleichungen (1) liefern in der uns interessierenden Näherung die durch Entwickeln unmittelbar folgenden Gleichungen

$$
\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu\,\partial x_\alpha} + \sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu\,\partial x_\alpha} - \sum_{\alpha}\frac{\partial^2\gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\left(\sum_{\alpha}\gamma_{\alpha\alpha}\right) = -2\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,\delta_{\mu\nu}\sum T_{\alpha\alpha}\right). \tag{2}
$$

Das letzte Glied der linken Seite stammt von der Größe $S_{\mu\nu}$, die bei der von mir bevorzugten Koordinatenwahl verschwindet. Die Gleichungen (2) lassen sich durch den Ansatz

$$
\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} + \psi\,\delta_{\mu\nu} \tag{3}
$$

lösen, wobei die $\gamma'_{\mu\nu}$ der zusätzlichen Bedingung

$$
\sum_{\nu}\frac{\partial\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \tag{4}
$$

genügen. Durch Einsetzen von (3) in (2) erhält man an Stelle der linken Seite

$$
-\sum_{\alpha}\frac{\partial\gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} - \frac{\partial^2}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\left(\sum_{\alpha}\gamma'_{\alpha\alpha}\right) + 2\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu} - \delta_{\mu\nu}\sum_{\alpha}\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\alpha^2} - 4\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x_\mu\,\partial x_\nu}\,.
$$

Der Beitrag des zweiten, dritten und fünften Gliedes verschwindet, wenn ψ gemäß der Gleichung

$$
\sum_{\alpha}\gamma'_{\alpha\alpha} + 2\psi = 0 \tag{5}
$$

gewählt wird, was wir festsetzen. Mit Rücksicht hierauf erhält man an Stelle von (2)

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\left(\gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_\alpha \gamma'_{\alpha\alpha}\right) = 2\varkappa\left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_\alpha T_{\alpha\alpha}\right)$$

oder

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2}{\partial x_\alpha^2}\gamma'_{\mu\nu} = 2\varkappa T_{\mu\nu}. \qquad (6)$$

Es ist hierzu zu bemerken, daß Gleichung (6) mit der Gleichung (4) im Einklang ist. Denn es ist zunächst leicht zu zeigen, daß bei der von uns erstrebten Genauigkeit der Impulsenergiesatz für die Materie durch die Gleichung

$$\sum_\nu \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = 0 \qquad (7)$$

ausgedrückt ward. Führt man an (6) die Operation $\sum_\nu \frac{\partial}{\partial x_\nu}$ aus, so verschwindet nicht nur vermöge (4) die linke Seite, sondern, wie es sein muß, vermöge (7) auch die rechte Seite von (6). Wir merken an, daß wegen (3) und (5) die Gleichungen

$$\gamma_{\mu\nu} = \gamma'_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_\alpha \gamma'_{\alpha\alpha} \qquad (8)$$

$$\gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\delta_{\mu\nu}\sum_\alpha \gamma_{\alpha\alpha} \qquad (8a)$$

bestehen. Da sich die $\gamma'_{\mu\nu}$ nach Art der retardierten Potentiale berechnen lassen, so ist damit unsere Aufgabe gelöst. Es ist

$$\gamma'_{\nu\mu} = -\frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{T_{\mu\nu}(x_0, y_0, z_0, t-r)}{r}\, dV_0. \qquad (9)$$

Dabei sind mit x, y, z, t die reellen Koordinaten $x_1, x_2, x_3, \frac{x_4}{i}$ bezeichnet, und zwar bezeichnen sie ohne Indizes die Koordinaten des Aufpunktes, mit dem Index »o« diejenigen des Integrationselementes. dV_0 ist das dreidimensionale Volumelement des Integrationsraumes r der räumliche Abstand $\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z)^2}$.

Für das Folgende bedürfen wir ferner der Energiekomponenten des Gravitationsfeldes. Wir erhalten sie am einfachsten direkt aus den Gleichungen (6). Durch Multiplikation mit $\frac{\partial \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}$ und Summation über μ und ν erhält man auf der linken Seite nach geläufiger Umformung

$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\sum_{\mu\nu} \frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\sigma}\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha} - \frac{1}{2}\delta_{\sigma\alpha}\sum_{\mu\nu\beta}\left(\frac{\partial \gamma'_{\mu\nu}}{\partial x_\beta}\right)^2\right].$$

Diese Klammergröße drückt bis auf den Proportionalitätsfaktor offenbar die Energiekomponenten $t_{\sigma\alpha}$ aus; der Faktor ergibt sich leicht durch Berechnen der rechten Seite. Der Impuls-Energie-Satz der Materie lautet ohne Vernachlässigungen

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial \sqrt{-g}\, T_{\mu}^{\sigma}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2} \sum_{\varrho\sigma} \frac{\partial g^{\varrho\sigma}}{\partial x_{\mu}} \sqrt{-g}\, T_{\varrho\sigma} = 0 .$$

Mit dem von uns gewünschten Grade der Näherung kann man dafür setzen

$$\sum_{\sigma} \frac{\partial T_{\mu\sigma}}{\partial x_{\sigma}} + \frac{1}{2} \sum_{\varrho\sigma} \frac{\partial g_{\varrho\sigma}}{\partial x_{\mu}} T_{\varrho\sigma} = 0 . \tag{7a}$$

Es ist dies die um einen Grad exaktere Formulierung zu Gleichung (7). Hieraus folgt, daß die rechte Seite von (6) bei der ins Auge gefaßten Umformung

$$-4\varkappa \sum \frac{\partial T_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}$$

liefert. Der Erhaltungssatz lautet also

$$\sum \frac{\partial (T_{\mu\nu} + t_{\mu\nu})}{\partial x_{\nu}} = 0 , \tag{10}$$

wobei

$$t_{\mu\nu} = \frac{1}{4\varkappa} \left[\sum_{\alpha\beta} \frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\mu}} \frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\nu}} - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \sum_{\alpha\beta\tau} \left(\frac{\partial \gamma'_{\alpha\beta}}{\partial x_{\tau}} \right)^{2} \right] \tag{11}$$

die Energiekomponenten des Gravitationsfeldes sind.

Als einfachstes Anwendungsbeispiel berechnen wir das Gravitationsfeld eines im Koordinatenursprung ruhenden Massenpunktes von der Masse M. Der Energietensor der Materie ist bei Vernachlässigung der Flächenkräfte durch

$$T_{\mu\nu} = \rho \frac{dx_{\mu}}{ds} \frac{dx_{\nu}}{ds} \tag{12}$$

gegeben, mit Rücksicht darauf, daß in erster Näherung der kovariante Tensor der Energie durch den kontravarianten ersetzt werden kann. Der Skalar ρ ist die (natürlich gemessene) Massendichte. Es ergibt sich aus (9) und (12), daß alle $\gamma'_{\mu\nu}$ bis auf γ'_{44} verschwinden, für welch letztere Komponente sich ergibt

$$\gamma'_{44} = -\frac{\varkappa}{2\pi} \frac{M}{r} . \tag{13}$$

Hieraus erhält man mit Hilfe von (8) und (1) für die $g_{\mu\nu}$ die Werte

$$\left.\begin{array}{cccc} -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1-\frac{\varkappa}{4\pi}\frac{M}{r} \end{array}\right\} \qquad (14)$$

Diese Werte, welche sich von den von mir früher angegebenen nur vermöge der Wahl des Bezugssystems unterscheiden, wurden mir durch Hrn. de Sitter brieflich mitgeteilt. Sie führten mich auf die im vorstehenden angegebene einfache Näherungslösung. Es ist aber wohl im Auge zu behalten, daß der hier benutzten Koordinatenwahl keine entsprechende im allgemeinen Falle zur Seite steht, indem die $\gamma_{\mu\nu}$ und $\gamma'_{\mu\nu}$ nicht beliebigen, sondern nur linearen, orthogonalen Substitutionen gegenüber Tensorcharakter besitzen.

§ 2. Ebene Gravitationswellen.

Aus den Gleichungen (6) und (9) folgt, daß sich Gravitationsfelder stets mit der Geschwindigkeit 1, d. h. mit Lichtgeschwindigkeit, fortpflanzen. Ebene, nach der positiven x-Achse fortschreitende Gravitationswellen sind daher durch den Ansatz zu finden

$$\gamma'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} f(x_1 + i x_4) = \alpha_{\mu\nu} f(x-t) \,. \qquad (15)$$

Dabei sind die $\alpha_{\mu\nu}$ Konstante; f ist eine Funktion des Arguments $x-t$. Ist der betrachtete Raum frei von Materie, d. h. verschwinden die $T_{\mu\nu}$, so sind die Gleichungen (6) durch diesen Ansatz erfüllt. Die Gleichungen (4) liefern zwischen den $\alpha_{\mu\nu}$ die Beziehungen

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{11} + i\alpha_{14} = 0 \\ \alpha_{12} + i\alpha_{24} = 0 \\ \alpha_{13} + i\alpha_{34} = 0 \\ \alpha_{14} + i\alpha_{44} = 0 \end{array}\right\} . \qquad (16)$$

Von den 10 Konstanten $\alpha_{\mu\nu}$ sind daher nur 6 frei wählbar. Wir können die allgemeinste Welle der betrachteten Art daher aus Wellen von folgenden 6 Typen superponieren

$$\left.\begin{array}{lll} \text{a)}\ \begin{array}{l}\alpha_{11} + i\alpha_{14} = 0 \\ \alpha_{14} + i\alpha_{44} = 0\end{array} & \begin{array}{l}\text{b)}\ \alpha_{12} + i\alpha_{24} = 0 \\ \text{c)}\ \alpha_{13} + i\alpha_{34} = 0\end{array} & \begin{array}{l}\text{d)}\ \alpha_{22} \neq 0 \\ \text{e)}\ \alpha_{23} \neq 0 \\ \text{f)}\ \alpha_{33} \neq 0\end{array} \end{array}\right\} . \qquad (17)$$

Diese Angaben sind so aufzufassen, daß für jeden Typ die in seinen Bedingungen nicht explizite genannten $\alpha_{\mu\nu}$ verschwinden; im Typ a sind also nur α_{11}, α_{14}, α_{44} von null verschieden usw. Den Symmetrieeigenschaften nach entspricht Typ a einer Longitudinalwelle, die Typen b und c Transversalwellen, während die Typen d, e, f einem neuartigen Symmetriecharakter entsprechen. Die Typen b und c unterscheiden sich nicht im Wesen, sondern nur durch ihre Orientierung gegen die y- und z-Achse voneinander, ebenso die Typen d, e, f, so daß eigentlich drei wesentlich verschiedene Wellentypen existieren.

Uns interessiert in erster Linie die von diesen Wellen transportierte Energie, welche durch den Energiestrom $\mathfrak{f}_x = \frac{1}{i} t_{41}$ gemessen wird. Es ergibt sich aus (11) für die einzelnen Typen.

$$\text{a)}\quad \frac{1}{i} t_{41} = \frac{f'^2}{4\varkappa} (\alpha_{11}^2 + \alpha_{14}^2 + \alpha_{41}^2 + \alpha_{44}^2) = 0$$

$$\text{b)}\quad \frac{1}{i} t_{41} = \frac{f'^2}{4\varkappa} (\alpha_{12}^2 + \alpha_{24}^2) = 0$$

$$\text{c)}\quad \frac{1}{i} t_{41} = \frac{f'^2}{4\varkappa} (\alpha_{13}^2 + \alpha_{34}^2) = 0$$

$$\text{d)}\quad \frac{1}{i} t_{22} = \frac{f'^2}{4\varkappa} \alpha_{22}^2 = \frac{1}{4\varkappa} \left(\frac{\partial \gamma'_{22}}{\partial t}\right)^2$$

$$\text{e)}\quad \frac{1}{i} t_{23} = \frac{f'^2}{4\varkappa} \alpha_{23}^2 = \frac{1}{4\varkappa} \left(\frac{\partial \gamma'_{23}}{\partial t}\right)^2$$

$$\text{f)}\quad \frac{1}{i} t_{33} = \frac{f'^2}{4\varkappa} \alpha_{33}^2 = \frac{1}{4\varkappa} \left(\frac{\partial \gamma'_{33}}{\partial t}\right)^2$$

Es ergibt sich also, daß nur die Wellen des letzten Typs Energie transportieren, und zwar ist der Energietransport einer beliebigen ebenen Welle gegeben durch

$$\mathfrak{f}_x = \frac{1}{i} t_{41} = \frac{1}{4\varkappa} \left[\left(\frac{\partial \gamma'_{22}}{\partial t}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial \gamma'_{23}}{\partial t}\right)^2 + \left(\frac{\partial \gamma'_{33}}{\partial t}\right)^2\right]. \qquad (18)$$

§ 3. Energieverlust körperlicher Systeme durch Emission von Gravitationswellen.

Das System, dessen Ausstrahlung untersucht werden soll, befinde sich dauernd in der Umgebung des Koordinatenursprungs. Wir betrachten das vom System erzeugte Gravitationsfeld lediglich für Aufpunkte, deren Abstand R vom Koordinatenursprung groß ist gegenüber den Abmessungen des Systems. Der Aufpunkt werde in die positive x-Achse verlegt, d. h. es sei

$$x_1 = R\,, \quad x_2 = x_3 = 0\,.$$

Die Frage ist dann, ob im Aufpunkt eine nach der positiven x-Achse gerichtete Wellenstrahlung vorhanden ist, welche Energie transportiert. Die Betrachtungen des § 2 zeigen, daß eine solche Strahlung im Aufpunkt nur den Komponenten $\gamma'_{22}, \gamma'_{23}, \gamma'_{33}$ geliefert werden kann. Diese allein haben wir also zu berechnen. Aus (9) ergibt sich

$$\gamma'_{22} = -\frac{\varkappa}{2\pi}\int \frac{T_{22}(x_0, y_0, z_0, t-r)}{r} dV_0 .$$

Ist das System wenig ausgedehnt und sind seine Energiekomponenten nicht allzu rasch veränderlich, so kann ohne merklichen Fehler das Argument $t-r$ durch das bei der Integration konstante $t-R$ ersetzt werden. Ersetzt man außerdem $\frac{1}{r}$ durch $\frac{1}{R}$, so erhält man die in den meisten Fällen genügende Näherungsgleichung

$$\gamma'_{22} = -\frac{\varkappa}{2\pi R}\int T_{22} dV_0 , \tag{19}$$

wobei die Integration in gewöhnlicher Weise, d. h. bei konstantem Zeitargument zu nehmen ist. Dieser Ausdruck läßt sich vermittels (7) durch einen für die Berechnung bei materiellen Systemen bequemeren ersetzen. Aus

$$\frac{\partial T_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{23}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{24}}{\partial x_4} = 0$$

folgt durch Multiplikation mit x_2 und Integration über das ganze System nach partieller Integration des zweiten Gliedes

$$-\int T_{22} dV + \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\int T_{24} x_2 dV\right) = 0 . \tag{20}$$

Ferner folgt aus

$$\frac{\partial T_{41}}{\partial x_1} + \frac{\partial T_{42}}{\partial x_2} + \frac{\partial T_{43}}{\partial x_3} + \frac{\partial T_{44}}{\partial x_4} = 0$$

durch Multiplikation mit $\frac{x_2^2}{2}$ auf analogem Wege

$$-\int T_{24} x_2 dV + \frac{\partial}{\partial x_4}\left(\int T_{44} \frac{x_2^2}{2} dV\right) = 0 . \tag{21}$$

Aus (20) und (21) folgt

$$\int T_{22} dV = \frac{\partial^2}{\partial x_4^2}\left(\int T_{44} \frac{x_2^2}{2} dV\right)$$

oder, indem man reelle Koordinaten einführt, und indem man sich die Näherung gestattet, die Energiedichte $(-T_{44})$ auch für beliebig bewegte Massen der ponderabeln Dichte ρ gleichzusetzen

$$\int T_{22}\,dV = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int \rho y^2\,dV\right). \tag{22}$$

Man hat also auch

$$\gamma'_{22} = -\frac{\varkappa}{4\pi R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int \rho y^2\,dV\right). \tag{23}$$

Auf analoge Weise berechnet man

$$\gamma'_{33} = -\frac{\varkappa}{4\pi R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int \rho z^2\,dV\right) \tag{23a}$$

$$\gamma'_{23} = -\frac{\varkappa}{4\pi R}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int \rho y^2\,dV\right). \tag{23b}$$

Die in (23), (23a) und (23b) auftretenden Integrale, welche nichts anderes sind als zeitlich variable Trägheitsmomente, nennen wir im folgenden zur Abkürzung J_{22}, J_{33}, J_{23}. Dann ergibt sich für die Intensität $\mathfrak{i}_x$ der Energiestrahlung aus (18)

$$\mathfrak{i}_x = \frac{\varkappa}{64\pi^2 R^2}\left[\left(\frac{\partial^3 J_{22}}{\partial t^3}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^3 J_{23}}{\partial t^3}\right)^2 + \left(\frac{\partial^3 J_{33}}{\partial t^3}\right)^2\right]. \tag{20}$$

Hieraus ergibt sich weiter, daß die mittlere Energiestrahlung nach allen Richtungen gegeben ist durch

$$\frac{\varkappa}{64\pi^2 R^2}\cdot\frac{2}{3}\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^3 J_{\alpha\beta}}{\partial t^3}\right)^2,$$

wobei über alle 9 Kombinationen der Indizes 1—3 zu summieren ist. Denn dieser Ausdruck ist einerseits invariant gegenüber räumlichen Drehungen des Koordinatensystems, wie leicht aus dem (dreidimensionalen) Tensorcharakter von $J_{\alpha\beta}$ folgt; anderseits stimmt er im Falle radialer Symmetrie ($J_{11} = J_{22} = J_{33}$; $J_{23} = J_{31} = J_{12} = 0$) mit (20) überein. Man erhält aus ihm also die Ausstrahlung A des Systems pro Zeiteinheit durch Multiplikation mit $4\pi R^2$:

$$A = \frac{\varkappa}{24\pi}\sum_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial^3 J_{\alpha\beta}}{\partial t^3}\right)^2. \tag{21}$$

Würde man die Zeit in Sekunden, die Energie in Erg messen, so würde zu diesem Ausdruck der Zahlenfaktor $\frac{1}{c^4}$ hinzutreten. Berücksichtigt man außerdem, daß $\varkappa = 1.87\cdot 10^{-27}$, so sieht man, daß A in allen nur denkbaren Fällen einen praktisch verschwindenden Wert haben muß.

Gleichwohl müßten die Atome zufolge der inneratomischen Elektronenbewegung nicht nur elektromagnetische, sondern auch Gravitationsenergie ausstrahlen, wenn auch in winzigem Betrage. Da dies in Wahrheit in der Natur nicht zutreffen dürfte, so scheint es, daß die Quantentheorie nicht nur die MAXWELLsche Elektrodynamik, sondern auch die neue Gravitationstheorie wird modifizieren müssen.

Nachtrag. Das seltsame Ergebnis, daß Gravitationswellen existieren sollen, welche keine Energie transportieren (Typen a, b, c), klärt sich in einfacher Weise auf. Es handelt sich nämlich dabei nicht um »reale« Wellen, sondern um »scheinbare« Wellen, die darauf beruhen, daß als Bezugssystem ein wellenartig zitterndes Koordinatensystem benutzt wird. Dies sieht man bequem in folgender Weise ein. Wählt man das Koordinatensystem in gewohnter Weise von vornherein so, daß $\sqrt{g} = 1$ ist, so erhält man statt (2) als Feldgleichungen bei Abwesenheit von Materie

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\alpha}}{\partial x_\nu \partial x_\alpha} + \sum_\alpha \frac{\partial^2 \gamma_{\nu\alpha}}{\partial x_\mu \partial x_\alpha} - \sum_\alpha \frac{\partial^2 \gamma_{\mu\nu}}{\partial x_\alpha^2} = 0 .$$

Führt man in diese Gleichungen direkt den Ansatz

$$\gamma_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\nu} f(x_1 + i x_4)$$

ein, so erhält man zwischen den Konstanten $\alpha_{\mu\nu}$ 10 Gleichungen, aus denen hervorgeht, daß nur α_{22}, α_{33} und α_{23} von null verschieden sein können (wobei $\alpha_{22} + \alpha_{33} = 0$). Bei dieser Wahl des Bezugssystems existieren also nur diejenigen Wellentypen (d, e, f), welche Energie transportieren. Die übrigen Wellentypen lassen sich also durch diese Koordinatenwahl wegschaffen; sie sind in dem angegebenen Sinne nicht »wirkliche« Wellen.

Wenn es also auch in dieser Untersuchung sich als bequem herausgestellt hat, die Wahl des Koordinatensystems von vornherein keiner Beschränkung zu unterwerfen, wenn es sich um die Berechnung der ersten Näherung handelt, so zeigt unser letztes Ergebnis doch, daß der Koordinatenwahl gemäß der Bedingung $\sqrt{-g} = 1$ eine tiefe physikalische Berechtigung zukommt.

Ausgegeben am 29. Juni.